СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Н. П. АНТОНОВ, М. Я. ВЫГОДСКИЙ, В. В. НИКИТИН,
А. И. САНКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

11-3-2

Антонов Николай Петрович, Выгодский Марк Яковлевич, Никитин Владимир Васильевич, Санкин Александр Иосифович.

Сборник задач по элементарной математике.

Редактор *С. М. Половинкин.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.* Корректор *Л. Е. Андрианова*

Печать с матриц. Подписано к печати 18/I 1960 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 16,63. Условн. печ. л. 27,26. Уч.-изд. л. 28,0.
Тираж 250 000 экз. Цена книги 9 р. 40 к. Заказ 949.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее пособие для самообразования предназначается для лиц с незаконченным средним образованием или окончивших школу давно и готовящихся к поступлению в вузы. Отклики читателей на первые два издания (вышедших под несколько иным названием) показали, что множество учащихся, занимающихся математикой без помощи преподавателя, действительно, нуждаются в таком пособии. Составители хотели помочь этим лицам научиться решать математические задачи, и с этой целью дали решения для большинства задач.

Задачи, родственные по идее решения, мы сгруппировали вместе. Для первых задач каждой группы дается более подробное решение, чем для последующих. Второстепенные моменты рассуждений и вычислений, как правило, опускаются, чтобы не стеснить самодеятельности учащегося. Напротив, принципиальным вопросам, существенным для решения задач, уделяется много места. Особенно это относится к вопросам, мало освещенным в учебной литературе; таковы, например, вопросы об утрате корней уравнения и появлении посторонних корней, об арифметических корнях, о способах изображения пространственных фигур. Мы полагаем, что соответствующие пояснения принесут некоторую пользу и учителю.

Однажды сделанное разъяснение, как правило, не повторяется в последующих задачах. Однако всюду, где это требуется, дана ссылка на номер той задачи, в которой помещено соответствующее разъяснение. Это сделано в интересах тех учащихся, которые будут пробовать свои силы на отдельных задачах. Все же авторы настоятельно рекомендуют решать задачи каждой главы в порядке номеров.

Порядок изучения глав безразличен.

Решение задачи следует прочесть *после того*, как задача решена самостоятельно, или после того, как выяснилось, что задача оказалась для учащегося непосильной. Если после

решения нескольких последовательных задач учащийся видит, что они его не затрудняют, то он может пропустить несколько задач; сколько именно — можно сообразить, бегло просмотрев условия и решения.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В четвертом издании, хотя оно издается стереотипно, оказалось возможным учесть ряд замечаний, сделанных читателями относительно рационализации решений, а также исправить погрешности, обнаруженные в предыдущих изданиях. Исполнение пожеланий, требующих более значительной переделки текста, пришлось отложить до следующего издания.

Составители выражают глубокую признательность всем лицам, приславшим свои отзывы о книге. Помимо лиц, упомянутых в предисловии ко второму изданию, мы должны особо поблагодарить тт. Бабушкина Э. (Москва), Бровак (Москва), Добровольского Б. А. (Лабинск), Коба А. (Ленинград), Кравченко В. (Сталинград), Кубицкого Г. (Вильнюс), Лысова В. И. (Сталино), Нахумович Р. М. (Баку), Панова Э. (Куйбышев), Старчевского Ч. А., Теплову (Кемерово), Филайовича А. Г. (София, Болгария), Фоминкова В. Ф. (Запорожье), Хованова Г. М., Шильникову А. (Киров) и Шмелькина С. (Ленинград).

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании уточнены формулировки некоторых задач и внесены некоторые дополнения в объяснения.

Составители выражают глубокую признательность всем лицам, приславшим отзывы о книге. Помимо лиц, упомянутых в предисловиях ко второму и четвертому изданиям, мы должны особо поблагодарить тт. Архарову М. (Таганрог), Заколоднина Ю. (Горький), Клопкова В. Ф. (Москва), Кузьмина В. С. (Львов), Лежнева А., Турчанинова В. В. (Харьков) и Шевченко А. (Одесса).

Заранее выражаем признательность тем читателям, которые захотят высказать свои пожелания и замечания.

Отзывы и пожелания адресовать: Москва В-71, Ленинский проспект 15, «Физматгиз».

Н. Антонов, М. Выгодский, В. Никитин.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

I. Арифметика и алгебра

Пропорции

1. В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; a и d — крайние члены, b и c — средние. Основное свойство пропорции $a\cdot d=b\cdot c$.

2. Перестановка членов пропорции:

$$\text{а) } \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\quad \text{б) } \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \text{в) } \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \text{г) } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

3. Производные пропорции: дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, справедливы следующие пропорции:

$$\text{а) } \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c};\qquad \text{б) } \frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Действия со степенями

1. $(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$, то есть $a^n\cdot b^n\cdot c^n=(a\cdot b\cdot c)^n$.

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, то есть $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$. 3. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

4. $a^m:a^n=a^{m-n}$. 5. $1:a^n=a^0:a^n=a^{-n}$.

6. $(a^m)^n=a^{mn}$.

Действия с корнями*)

1. $\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}$, то есть $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}$.

2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, то есть $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.

---

*) Корни предполагаются арифметическими, ср. стр. 122—125.

3. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, то есть $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. 4. $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p = \sqrt[m]{a^{np}}$.

5. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$, то есть $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Квадратные уравнения

1. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ решается по формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

2. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ решается по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

3. Уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ решается по формуле $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

4. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

5. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

6. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Прогрессии (см. стр. 43).

Логарифмы*)

1. Запись $\log_a N = x$ равнозначна записи $a^x = N$, так что имеем тождество $a^{\log_a N} = N$.

2. $\log_a a = 1$. 3. $\log_a 1 = 0$. 4. $\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$.

5. $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$. 6. $\log_a (N^m) = m \log_a N$.

7. $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \log_a N$.

8. О модуле перехода от системы логарифмов с основанием «b» к системе с основанием «a» см. стр. 192—193.

Соединения

1. $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$. 2. $P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m = m!$

3. $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$. 4. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

---

*) Числа a (основание логарифма) и N предполагаются положительными, причем a отлично от 1.

Бином Ньютона

1. $(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots$
$\ldots + C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m.$
2. Общий член разложения: $T_{k+1} = C_m^k a^k x^{m-k}$.
3. $1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-2} + C_m^{m-1} + 1 = 2^m$.
4. $1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots \pm 1 = 0$.

II. Геометрия и тригонометрия

Длина окружности и ее дуги

$C = 2\pi R$; $l = \frac{\pi R a}{180} = R\alpha$ (a — градусная мера дуги, α — радианная мера).

Площади

Треугольник: $S = \frac{ah}{2}$ (a — основание, h — высота); $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p — полупериметр, a, b и c — стороны); $S = \frac{ab \sin C}{2}$.

Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a — сторона треугольника).

Параллелограмм: $S = bh$ (b — основание, h — высота).

Ромб: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ (d_1 и d_2 — диагонали).

Трапеция: $S = \frac{a+b}{2}h$ (a и b — основания, h — высота). $S = mh$ (m — средняя линия).

Правильный многоугольник: $S = \frac{Pa}{2}$ (P — периметр, a — апофема).

Круг: $S = \pi R^2$.

Круговой сектор: $S = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 a}{360}$ (a — градусная мера дуги сектора, α — радианная мера, l — длина дуги сектора).

Поверхности

Призма: $S_{бок} = Pl$ (P — периметр перпендикулярного сечения, l — боковое ребро).

Правильная пирамида: $S_{бок} = \frac{Pa}{2}$ (P — периметр основания, a — апофема).

Правильная усеченная пирамида: $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} a$ (P_1 и P_2 — периметры оснований, a — апофема).

Цилиндр: $S_{бок} = 2\pi RH$.

Конус: $S_{бок} = \pi Rl$ (l — образующая).

Усеченный конус: $S_{бок} = \pi (R_1 + R_2) l$.

Шар: $S = 4\pi R^2$.

Объемы

Призма: $V = SH$ (S — площадь основания, H — высота).

Пирамида: $V = \frac{SH}{3}$.

Усеченная пирамида: $V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Цилиндр: $V = \pi R^2 H$.

Конус: $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$.

Усеченный конус: $V = \frac{\pi H}{3}\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right)$.

Шар: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно

$\alpha = \frac{\pi \cdot a^\circ}{180^\circ}$; $a^\circ = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ (α — радианная мера угла, a — градусная).

Формулы сложения

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Двойные и половинные углы

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.
4. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$.
5. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$.
6. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$.
7. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.
8. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Приведение тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
5. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.
6. $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 7. $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Некоторые важные соотношения

1. $\sin\alpha\ \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$.
2. $\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$.
3. $\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$.

Соотношения между элементами прямоугольного треугольника

(a, b — катеты; c — гипотенуза; A, B — острые углы; C — прямой)

1. $a = c\sin A = c\cos B$. 2. $b = c\sin B = c\cos A$.
3. $a = b\operatorname{tg} A = b\operatorname{ctg} B$. 4. $b = a\operatorname{tg} B = a\operatorname{ctg} A$.

Соотношения между элементами произвольного треугольника (a, b, c — стороны; A, B, C — углы)

1. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (теорема синусов).
2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (теорема косинусов).
3. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$ (теорема тангенсов).

Связь между значениями обратных тригонометрических функций

($\arcsin x$; $\arccos x$; $\operatorname{arctg} x$ — главные значения соответствующих обратных тригонометрических функций)

1. $\operatorname{Arcsin} x = k\pi + (-1)^k \arcsin x$. 2. $\operatorname{Arccos} x = 2\pi k \pm \arccos x$.
3. $\operatorname{Arctg} x = \pi k + \operatorname{arctg} x$; k — любое целое число (положительное или отрицательное).

ЗАДАЧИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ГЛАВА 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. $$\frac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0,3}{0,2}.$$

2. $$\frac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0,8\cdot 0,25}.$$

3. $$\frac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0,0001:0,005}.$$

4. $$\left(\frac{0,012}{5}+\frac{0,04104}{5,4}\right)\cdot 4560-42\frac{1}{3}.$$

5. $$\frac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0,04}.$$

6. $$\frac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0,002}.$$

7. $$\frac{\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+0,373}{0,2}.$$

8. $$\frac{\left(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3}+0,6}{0,2}.$$

9. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)\cdot 13,5+0,111}{0,02}$.

10. $\dfrac{\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5}+2,13}{0,4}$.

11. $\dfrac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1,25):2,5}$.

12. $\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4,375\right):19\frac{8}{9}}$.

13. $\dfrac{0,134+0,05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$.

14. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0,8+2\frac{1}{9}\cdot 0,225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}$.

15. $\dfrac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\right)\cdot 4,5}{0,04}$.

16. $\dfrac{(2,1-1,965):(1,2\cdot 0,045)}{0,00325:0,013}-\dfrac{1:0,25}{1,6\cdot 0,625}$.

17. $\dfrac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10,9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)\cdot 1\frac{9}{11}\right]\cdot 4,2}{0,008}$.

18. $\left[\dfrac{\left(2,4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4,375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\dfrac{\left(2,75-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-0,45}\right]:\dfrac{67}{200}$.

19. $\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0,03}{\left(3\frac{1}{20}-2,65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right]:2\frac{1}{20}$.

20. $26:\left[\frac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\frac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right]+\frac{2}{3}:\frac{4}{21}$.

21. $\frac{3:\frac{2}{5}-0{,}09:\left(0{,}15:2\frac{1}{2}\right)}{0{,}32\cdot 6+0{,}03-(5{,}3-3{,}88)+0{,}67}$.

22. $1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right)$.

23. $\left(10:2\frac{2}{3}+7{,}5:10\right)\cdot\left(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0{,}25+\frac{157}{360}\right)$.

24. $\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39$.

25. $1{,}7:\frac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}-\left(0{,}5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right)$.

26. $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}+0{,}228:\left[\left(1{,}5291-\frac{14{,}53662}{3-0{,}095}\cdot 0{,}305\right):0{,}12\right]$.

27. $\left\{\frac{8{,}8077}{20-[28{,}2:(13{,}333\cdot 0{,}3+0{,}0001)]\cdot 2{,}004}+4{,}9\right\}\cdot\frac{5}{32}$.

28. $\frac{\left[\left(6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9\right)\cdot 0{,}2+0{,}15\right]:0{,}02}{\left(2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}1\right)\cdot\frac{1}{33}}$.

29. $6:\frac{1}{3}-0{,}8:\frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}$.

30. $\frac{\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1{,}75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80}-0{,}0325\right):400}:(6{,}79:0{,}7+0{,}3)$.

31. $$\frac{4{,}5:\left[47{,}375-\left(26\frac{1}{3}-18\cdot 0{,}75\right)\cdot 2{,}4:0{,}88\right]}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}.$$

32. Найти число, 3,6% которого составляют

$$\frac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}.$$

33. Вычислить

$$\left(46\frac{2}{25}:12+41\frac{23}{35}:260\frac{5}{14}+800:12\frac{28}{31}\right)\cdot\frac{0{,}8\cdot 7{,}2\cdot 4{,}5\cdot 1{,}3}{6{,}5\cdot 2{,}7\cdot 1{,}92}.$$

34. Вычислить

$$\left[15:\frac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005):0{,}01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}\right]\left(0{,}645:0{,}3-1\frac{107}{180}\right)\left(4:6{,}25-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdot 1{,}96\right).$$

35. Вычислить

$$\left[\left(7\frac{2}{3}-6\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{14}\right):\left(8\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-1\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{18}:\frac{14}{27}\right]\left(\frac{5}{6}-0{,}75\right)\times$$
$$\times\frac{20{,}4\cdot 4{,}8\cdot 6{,}5}{22{,}1\cdot 1{,}2}.$$

36. Вычислить

$$\frac{2{,}045\cdot 0{,}033+10{,}518395-0{,}464774:0{,}0562}{0{,}003092:0{,}0001-5{,}188}.$$

37. Вычислить

$$\left(7\frac{1}{9}-2\frac{14}{15}\right):\left(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{20}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{14}\right).$$

38. Вычислить

$$\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:0{,}16\right\}.$$

39. Вычислить

$$\frac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4-\frac{3}{4}}:31.$$

40. Вычислить

$$\frac{0{,}8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)}{0{,}64-\frac{1}{25}}+\frac{\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+(1{,}2\cdot 0{,}5):\frac{4}{5}.$$

41. Вычислить

$$\left[41\frac{29}{72}-\left(18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}\right)\left(10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right)\right]:22\frac{7}{18}.$$

42. Вычислить

$$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}003}{\left[\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)4\right]:\frac{1}{5}}-\frac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:62\frac{1}{20}+$$
$$+17{,}81:0{,}0137.$$

43. Вычислить x, если

$$5\frac{4}{7}:\left\{x:1{,}3+8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left[6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right]\right\}=1\frac{1}{14}.$$

44. Вычислить x, если

$$\frac{\left[\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):x+(2{,}5:1{,}25):6{,}75\right]:1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}=\frac{17}{27}.$$

45. Найти x, если

$$\frac{(2{,}7-0{,}8)\,2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{7}}+x+8\frac{9}{11}-\frac{(1{,}6+154{,}66:70{,}3):1{,}9}{\left(2\frac{2}{5}-1{,}3\right):4{,}3}=2{,}625.$$

ГЛАВА 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Упростить выражения:

46. $(a^2-b^2-c^2+2bc):\frac{a+b-c}{a+b+c}$;

результат вычислить при $a=8{,}6$; $b=\sqrt{3}$; $c=3\frac{1}{3}$.

47. $\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$.

48. $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)$.

49. $\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\frac{3x-6}{x-2}\right)$.

50. $\left(\frac{2a+10}{3a-1}+\frac{130-a}{1-3a}+\frac{30}{a}-3\right)\cdot\frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}$.

51. $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

52. $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$.

53. $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$.

54. $\left[\frac{a-1}{a^2-2a+1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+2}\right]\times$

$\times\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}$.

55. $$\left[\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right]:\left[\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right].$$

56. $$\left(\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}.$$

57. $$\frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right].$$

58. $$\frac{2a^3(b+c)^{2n}-\frac{1}{2}}{an^2-a^3-2a^2-a}:\frac{2a(b+c)^n-1}{a^2c-a(nc-c)}.$$

59. $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}.$$

60. $$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right];$$

результат вычислить при $x=\frac{1}{a-1}$.

61. $$\left[\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right]:\left(2a^nb+3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}.$$

62 [1]. $$\frac{\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right]a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}.$$

63. $$\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}.$$

64. $$\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}.$$

65. $$\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)\cdot(a^2-1)\cdot(1+2a+a^2)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}.$$

---

[1] Прежде чем приступать к решению дальнейших задач, познакомьтесь с замечаниями на стр. 122—125.

66. $\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}.$

67. $ab\sqrt[n]{a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}}\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}.$

68. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11).$

69. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\Big(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

70. $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt[-2]{\frac{1}{9}a^{-2}b^{-1}}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}.$

71. $\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a}.$

72. Определить значение выражения

$$\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}$$

при $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$ $(a\geqslant 1,\ b\geqslant 1)$.

73. Определить значение выражения

$$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$$

при $x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$, $|m|<1$.

Упростить выражения:

74. $\frac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$,

если $x=\frac{2mn}{n^2+1}$, причем $m>0$, $0<n<1$.

75. $$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

если $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$, причем $k>1$.

76. $$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{2^{-2}}{a}\right)\left[(a-1)\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}-\right.$$
$$\left.-\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2-1)(a-1)}}\right].$$

77. $$\left(2\sqrt{x^4-a^2x^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{1-a^2x^{-2}}}\right)\cdot\frac{(x^2a^{-2}-4+4a^2x^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{2ax(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}.$$

78. $$\frac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}.$$

79. $$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-$$
$$-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}.$$

80. $$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\frac{a}{2}\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}.$$

81. $$2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}\right)-\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

82. Вычислить
$$\left[a^{-\frac{3}{2}}b\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$$
при $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

83. Определить значение выражения

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$$

при $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ и $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

Упростить выражения:

84. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$.

85. $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$.

86. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

87. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$.

88. $\left(2^{\frac{3}{2}}+27y^{\frac{3}{5}}\right):\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right]$.

89. Доказать тождество

$$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0.$$

90. Вычислить

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$$

при $a=1,2$ и $b=\dfrac{3}{5}$.

Упростить выражения:

91. $$\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right);$$

результат вычислить при $a=54$ и $b=6$.

92. $$\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}.$$

93. $$a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1+\left[a(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2}\cdot\frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-a^2}.$$

94. $$\frac{x^{\frac{5}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)(x^2+1)}-\left(x-\frac{x^3}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2\sqrt{(1+x^2)^{-1}}-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}.$$

95. $$(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}+R^2\frac{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(R^2-x^2)\left[1+\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)^{-2}\right]}.$$

96. $$\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}(p^{-1}+q^{-1})+\frac{2}{\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^3}\cdot\left(p^{-\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

97. $$\left[\frac{\left(a+\sqrt[3]{a^2x}\right):\left(x+\sqrt[3]{ax^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^6.$$

98. $\left[\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}$.

99. $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^{2}$.

100. $\left[(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right]$.

101. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$.

102. $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

103. $\left[\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}$.

104. $x^3\left[\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

105. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{a}{x}}$.

106. $\dfrac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}$.

107. $\left\{\sqrt{1+\left[\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^2}\right\}^{-6}-$

$-\dfrac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}$.

108. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}$.

109. $$\left[\frac{\sqrt[6]{a^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[6]{x}\right]^3+4(x+1)+\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+1\right)^2.$$

110. $$\left[\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}.$$

111. $$\sqrt[-\frac{1}{2}]{\sqrt{a}}\left[\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right]^2.$$

112. $$\left[\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3+2x+a}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3-x-2a}\right]^3+\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)^{\frac{2}{3}}}:a.$$

113. $$\left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]:\frac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}.$$

114. $$\left(\frac{a-4b}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}-6b}-\frac{a-9b}{a+6(ab)^{\frac{1}{2}}+9b}\right)\cdot\frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}.$$

115. $$\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

116. $$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$$

117. $$\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

118. $$\left[\frac{\frac{1}{a}-a}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-1\right)}+\sqrt[3]{a}\right]^{-3}.$$

119. $$\left[\frac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right]\times$$
$$\times\left[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})^2\right].$$

120. $$\left[\left(\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2.$$

121. $$\left[\frac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4.$$

122. $$\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$$

123. $$\sqrt{a}\left[\frac{a+\sqrt[4]{a^3b^2}+b\sqrt[4]{ab^2}+b^2}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^2}-b\right]^{-1}+\frac{1}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-1}.$$

124. $$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

125. $$\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\frac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}.$$

126. $$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}.$$

127. $$\frac{\sqrt{a^3b}\,\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\sqrt{ab}}-$$
$$-a^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2}:\frac{a+b}{3a-ab}-\frac{ab}{a+b}\right).$$

128. $$\left[\frac{10x^2+3ax}{4x^2-a^2}+\frac{bx-x^2-ax+ab}{2x+a}:(b-x)-2\right]\times$$
$$\times\left[\frac{(a+2x)^{-\frac{1}{2}}+(2x-a)^{\frac{1}{2}}}{(4x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]^2.$$

129. $$\left[\frac{x+4}{2x^2-2x-4}+\frac{x+2}{2(x^2+3x+2)}\right]\sqrt{2}\,x-$$
$$-\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}-\frac{x+6}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

130. $$\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{(1+x)^{-\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}}:\frac{\sqrt{1-x}}{x-2}+$$
$$+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2-4x}-\frac{5}{x^2-3x-4}\right).$$

131. $$\frac{a^2\sqrt{ab^{-1}}\,\sqrt[3]{b^2\sqrt{ab}}-2\sqrt{a^3b}\,\sqrt[6]{ab^5}}{(a^2-ab-2b^2)\sqrt[3]{a^5b}}-$$
$$-\frac{a-3}{a+2b}\left[\frac{a+2b}{a^2+ab-3a-3b}-(a-1)(a^2-4a+3)^{-1}\right].$$

132. $$\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}}-(ab)^{\frac{3}{4}}:\sqrt{a}}{(a^2-b^2)\,a^{-1}}\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)+$$
$$+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{2a+2b}{a-4b}+\frac{a+3b}{2a+2b}-\frac{a^2+21ab}{2a^2-6ab-8b^2}\right).$$

133. $$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab}\,\sqrt{a}\right)^2}{ab\sqrt[6]{ab}}+4\right]:\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+$$
$$+\frac{b^2-4a^2}{4a}\cdot\left(\frac{1}{b^2+3ab+2a^2}-\frac{3}{2a^2+ab-b^2}\right).$$

134. $$\frac{4(2ab)^{\frac{3}{4}}(a+2b)^{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}:\frac{\sqrt{2b\sqrt{2ab}}+\sqrt[4]{2a^3b}}{\sqrt{2ab}}-$$
$$-6\left(\frac{a}{6a-48b}-\frac{2b}{3a-6b}-\frac{8b^2}{a^2-10ab+16b^2}\right).$$

ГЛАВА 3

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решить уравнения:

135. $$\frac{6b+7a}{6b}-\frac{3ay}{2b^2}=1-\frac{ay}{b^2-ab}.$$

136. $$\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

137. $$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3.$$

138. $$\frac{c+3z}{4c^2+6cd}-\frac{c-2z}{9d^2-6cd}=\frac{2c+z}{4c^2-9d^2}.$$

139. $$\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n}.$$

140. $$\frac{3ab+1}{a}x=\frac{3ab}{a+1}+\frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}+\frac{a^3}{(a+1)^3}.$$

141. $$\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$$

142. $$\frac{x+m}{a+b}-\frac{ax}{(a+b)^2}=\frac{am}{a^2-b^2}-\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}.$$

143. $$\frac{m}{z}+\frac{z}{m}+\frac{m(z-m)}{z(z+m)}-\frac{z(z+m)}{m(z-m)}=\frac{mz}{m^2-z^2}-2.$$

144. $\dfrac{a^2+x}{b^2-x}-\dfrac{a^2-x}{b^2+x}=\dfrac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$.

145. $\dfrac{an}{a-x}+\dfrac{(a+n)(anx+nx^2+x^3)}{x^3+nx^2-a^2x-a^2n}=\dfrac{ax}{n+x}+\dfrac{nx^2}{x^2-a^2}$.

146. $\left(\dfrac{a+1}{ax+1}+\dfrac{x+1}{x+a^{-1}}-1\right):\left[\dfrac{a+1}{(x+a^{-1})a}-\dfrac{a(x+1)}{ax+1}+1\right]=\dfrac{x}{2}$.

147. $\dfrac{a+x}{a^2+ax+x^2}-\dfrac{a-x}{ax-x^2-a^2}=\dfrac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$.

148. $a(\sqrt{x}-a)-b(\sqrt{x}-b)+a+b=\sqrt{x}$.

149. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a+2x}=0$.

150. $\dfrac{2x}{x+b}-\dfrac{x}{b-x}=\dfrac{b^2}{4(x^2-b^2)}$.

151. $1-\dfrac{2a}{x-a}=\dfrac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}$.

152. $\dfrac{x^2}{ab-2b^2}=\dfrac{a-b}{ac^2-2bc^2}+\dfrac{x}{bc}$.

153. $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{2x}{x-a}=\dfrac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$.

154. $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n}-\dfrac{1}{2-nx}=\dfrac{x}{n}$.

155. $\dfrac{a-x^2}{(a-x)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}$.

156. $1-\dfrac{2b}{x-a}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}$.

157. $\dfrac{1}{2n+nx}-\dfrac{1}{2x-x^2}=\dfrac{2(n+3)}{x^3-4x}$.

158. $\dfrac{a+x-2n}{2a-n}-\dfrac{a-2n}{x}=1$.

159. $\frac{a}{nx-x}-\frac{a-1}{x^2-2nx^2+n^2x^2}=1.$

160. $\frac{\left(\frac{a-x}{x}\right)^2-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2}{x^2+a^2-2ax}=\frac{5}{9x^2}.$

161. $\frac{x+x^2}{1-x^2}:\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}=\frac{ab}{(b-a)^2}.$

162. Разложить на линейные множители выражение

$$11x-3x^2+70.$$

163. Разложить $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ на два множителя, сумма которых была бы равна $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

164. Разложить на множители $15x^3+x^2-2x$.

165. Разложить на множители $x^3+2x^4+4x^2+2+x$.

165а. Решить уравнение

$$(1+x^2)^2=4x(1-x^2).$$

166. Написать квадратное уравнение, корнями которого были бы числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$.

167. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$ и $\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$.

168. Написать квадратное уравнение, корни которого $\frac{a}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-b}}$.

169. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения

$$x^2+px+12=0$$

обладают свойством $x_1-x_2=1$. Найти коэффициент p.

170. В уравнении

$$5x^2 - kx + 1 = 0$$

определить k таким образом, чтобы разность корней уравнения равнялась единице.

171. Корни x_1 и x_2 уравнения

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

таковы, что $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$. Определить величину a.

172. Определить коэффициенты квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

так, чтобы его корни были равны p и q.

173. Корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

равны x_1 и x_2. Составить новое квадратное уравнение, корни которого были бы $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

174. Дано квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Составить новое квадратное уравнение, корни которого:

1) вдвое больше корней данного;
2) обратны корням данного.

175. Составить квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

176. Составить биквадратное уравнение, сумма квадратов корней которого равна 50, а произведение корней равно 144.

177. Найти все корни уравнения

$$4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = 0,$$

если один из корней равен $3 + i\sqrt{6}$.

178. Определить свободный член уравнения

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0,$$

если известно, что один из его корней равен 2. Найти остальные два корня.

179. Зная, что 2 и 3 являются корнями уравнения

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0,$$

определить m и n и найти третий корень уравнения.

180. При каких численных значениях буквы a уравнение

$$x^2 + 2ax\sqrt{a^2 - 3} + 4 = 0$$

имеет равные между собой корни?

180а. В каком промежутке должно изменяться число m, чтобы оба корня уравнения

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

были заключены между -2 и 4?

Решить уравнения:

181. $\sqrt{y+2} - \sqrt{y-6} = 2.$

182. $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2.$

183. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2.$

184. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7.$

185. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1.$

186. $\sqrt{3x-2} = 2\sqrt{x+2} - 2.$

187. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}.$

188. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x + 1.$

189. $\frac{3+x}{3x}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}}.$

190. $\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}.$

191. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}.$

192. $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}.$

193. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{x}.$

194. $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{28}.$

195. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

196. $\frac{\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}=\frac{27}{x}.$

197. $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}.$

198. $\frac{\sqrt{1+a^{-2}x^2}-xa^{-1}}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}+xa^{-1}}=\frac{1}{4}.$

199. $\frac{\sqrt{1+a^2x^2}-ax}{\sqrt{1+a^2x^2}+ax}=\frac{1}{c^2}.$

200. $\frac{x+c+\sqrt{x^2-c^2}}{x+c-\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{9(x+c)}{8c}.$

201. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

202. $2\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}.$

203. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b.$

204. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}.$

205. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

206. $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}$.

207. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$.

208. $(x-1)^{\frac{1}{2}}+6(x-1)^{\frac{1}{4}}=16$.

209. $\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}=-\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}$.

210. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$.

211. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$.

212. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.

213. $2\sqrt[3]{z^2}-3\sqrt[3]{z}=20$.

214. $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0$.

215. $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}$.

216. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

217. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

218. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$.

219. $\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$.

220. $\frac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2-x}{2}}$.

221. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$.

222. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

223. $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

224. $\sqrt{y^2+4y+8}+\sqrt{y^2+4y+4}=\sqrt{2(y^2+4y+6)}$.

Решить системы уравнений:

225. $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2), \\ x+y=6. \end{cases}$

226. $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

227. $\begin{cases} x+y^2=7, \\ xy^2=12. \end{cases}$

228. $\begin{cases} x^2-y=23, \\ x^2y=50. \end{cases}$

229. $\begin{cases} (x^2-y^2)xy=180, \\ x^2-xy-y^2=-11. \end{cases}$

230. $\begin{cases} 3x^2-2xy+5y^2-35=0, \\ 5x^2-10y^2-5=0. \end{cases}$

231. $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}xy, \\ x-y=\frac{1}{4}xy. \end{cases}$

232. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4. \end{cases}$

233. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x-y=1. \end{cases}$

234. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}, \\ x^2-y^2=7. \end{cases}$

235. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^m\cdot\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=c, \\ \left(\dfrac{x}{b}\right)^n\cdot\left(\dfrac{y}{a}\right)^m=d \end{cases}$

(ограничиться положительными решениями, считая, что $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ и $m\neq n$).

236. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

237. $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$

(ограничиться действительными решениями).

238. $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

239. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=5\dfrac{1}{5}, \\ xy=6. \end{cases}$

240. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=d, \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2. \end{cases}$

241. $\begin{cases} x+2y+3z+4u=30, \\ 2x-3y+5z-2u=3, \\ 3x+4y-2z-u=1, \\ 4x-y+6z-3u=8. \end{cases}$

242. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x+2y+3z=5, \\ x^2+y^2+z^2=14. \end{cases}$

243. $\begin{cases} \sqrt{4x+y-3z+7}=2, \\ \sqrt[3]{2y+5x+z+25{,}5}=3, \\ \sqrt{y+z}-\sqrt{6x}=0. \end{cases}$

244. $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=61, \\ xy+xz=2yz. \end{cases}$

245. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ xy+yz+zx=47, \\ (z-x)(z-y)=2. \end{cases}$

246. $\begin{cases} a^3+a^2x+ay+z=0, \\ b^3+b^2x+by+z=0, \\ c^3+c^2x+cy+z=0. \end{cases}$

247. $\begin{cases} \dfrac{12}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=5, \\ \dfrac{8}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=6. \end{cases}$

248. $\begin{cases} x+y-2\sqrt{xy}=4, \\ x+y=10. \end{cases}$

249. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x}{x+y}}-2+\sqrt{\dfrac{x+y}{3x}}=0, \\ xy-54=x+y. \end{cases}$

250. $\begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{17}=0, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6. \end{cases}$

251. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\sqrt{a}, \\ \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=(\sqrt{41}-3)a. \end{cases}$

252. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y, \\ x^4-y^4=144a^4. \end{cases}$

253. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=84, \\ x+\sqrt{xy}+y=14. \end{cases}$

253а. Найти все значения m, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy), \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

имеет действительные решения.

ГЛАВА 4

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определить x без помощи таблиц:

254. $x=10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$.

255. $x=100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}$.

256. $x=\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

257. $x=49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$.

Решить уравнения:

258. $\log_4\log_3\log_2 x=0$.

259. $\log_a\{1+\log_b[1+\log_c(1+\log_p x)]\}=0$.

260. $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\}=\frac{1}{2}$.

261. $\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$.

262. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0$.

263. $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3.$

264. $1+\lg x=$

$$=\frac{1}{3}\lg\left[b-\frac{(3a-b)(a^2+ab)^{-1}}{b^{-2}}\right]-\frac{4}{3}\lg b+\frac{1}{3}\lg(a^3-ab^2).$$

265. $\lg\left[x-a(1-a)^{-\frac{1}{2}}\right]-\frac{1}{2}\lg\left(1+\frac{1}{a}\right)-$

$$-\lg\sqrt{\frac{a^3+a}{a+1}-a^2}=0.$$

266. $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)-2{,}25=\left(\log_x\sqrt{5}\right)^2.$

267. $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7.$

268. $\log_a x-\log_{a^2}x+\log_{a^4}x=\frac{3}{4}.$

269. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}.$

270. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$

271. $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$

272. $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}.$

273. $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$

274. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\lg 4}{\lg 8}.$

275. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4.$

276. $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{2^{-1}x^{-\frac{1}{2}}}-\sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2}=0.$

277. $\sqrt[x^2-1]{a^3}\sqrt[2x-2]{a}\sqrt[4]{a^{-1}}=1.$

278. $3\log_{xa^3}x+\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x=2.$

279. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$

280. $\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1.$

281. $1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{x-1}+a^x=$
$=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8).$

282. $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\ldots 5^{2x}=0{,}04^{-28}.$

283. $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0.$

284. $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0.$

285. $3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0.$

286. $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}.$

287. $\lg\left(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)-1=\lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-2\lg 2.$

288. $2(\lg 2-1)+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right).$

289. $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}.$

290. $x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10}.$

291. $\lg\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)=0.$

292. $\log_2(9-2^x)=3-x.$

293. $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1).$

294. $2\lg 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3-\lg\left(\sqrt[x]{3}+27\right)=0.$

295. $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+0{,}25}\,\lg 4.$

296. $\dfrac{2\lg 2 + \lg(x-3)}{\lg(7x+1) + \lg(x-6) + \lg 3} = \dfrac{1}{2}.$

297. $\log_5 120 + (x-3) - 2\log_5(1-5^{x-3}) = -\log_5(0{,}2 - 5^{x-4}).$

Решить систему уравнений:

298. $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32\cdot 2^{4y-1}, \\ 5\cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}. \end{cases}$

299. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ x + y = 3,(3). \end{cases}$

300. $\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2, \\ \log_b x - \log_b y = 4. \end{cases}$

301. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3\lg 2. \end{cases}$

302. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1, \\ \log_{xy}(x+y) = 0. \end{cases}$

303. $\begin{cases} \log_a\left(1+\frac{x}{y}\right) = 2 - \log_a y, \\ \log_b x + \log_b y = 4. \end{cases}$

304. $\begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9, \\ x + y - 5a = 0. \end{cases}$

305. $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2{,}5\lg^2(a^2). \end{cases}$

306. $$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4. \end{cases}$$

307. $$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg a, \\ 2(\lg x - \lg y) = \lg b. \end{cases}$$

308. $$\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2}, \\ \log_{b^2} x + \log_b y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

309. $$\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2}, \\ \log_{b^2} x - \log_{b^3} y = 1. \end{cases}$$

310. $$\begin{cases} \log_v u + \log_u v = 2, \\ u^2 + v = 12. \end{cases}$$

311. $$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{a} + \log_{\frac{y}{\sqrt{b}}} \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

312. $$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

313. $$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

314. $$\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y)\, 2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

315. $$\begin{cases} \sqrt[10]{2^x}\sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128}, \\ \lg(x+y) = \lg 40 - \lg(x-y). \end{cases}$$

316. $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[y]{9^{1-y}}. \end{cases}$

317. $\begin{cases} 9^{-1}\sqrt[y]{9^x} - 27\sqrt[x]{27^y} = 0, \\ \lg(x-1) - \lg(1-y) = 0. \end{cases}$

318. $\begin{cases} \frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg y - \lg(4-\sqrt{x}) = 0, \\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}} - 125 \cdot 5^{\sqrt{y}} = 0. \end{cases}$

319. $\begin{cases} \log_x ay = p, \\ \log_y bx = q. \end{cases}$

ГЛАВА 5
ПРОГРЕССИИ

Обозначения и формулы

a_1 — первый член, a_n — n-й член, d — разность арифм. прогрессии,
u_1 — » » , u_n — » », q — знаменатель геом. » ,
S_n — сумма n членов прогрессии, S — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Формулы арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \qquad (2)$$

$$S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}. \qquad (3)$$

Формулы геометрической прогрессии

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \qquad (4)$$

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} \quad (q > 1) \quad \text{или} \quad S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q} \quad (q < 1), \qquad (5)$$

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1} \quad (q > 1) \quad \text{или} \quad S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q < 1), \qquad (6)$$

$$S = \frac{u_1}{1-q}. \qquad (7)$$

Арифметическая прогрессия

320. Сколько надо взять членов арифметической прогрессии

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \ldots,$$

чтобы получить сумму, равную 10 877?

321. Найти арифметическую прогрессию, зная, что сумма первых четырех членов ее равна 26, а произведение тех же членов равно 880.

322. В арифметической прогрессии $a_p = q$; $a_q = p$. Найти выражение a_n через n, p и q.

323. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел.

324. Найти четыре последовательных нечетных числа, зная, что сумма их квадратов больше суммы квадратов заключенных между ними четных чисел на 48.

325. В арифметической прогрессии 20 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 250, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 220. Найти два средних члена прогрессии.

326. Дан ряд выражений: $(a+x)^2$; (a^2+x^2); $(a-x)^2$; ... Доказать, что они составляют арифметическую прогрессию, и найти сумму n членов ее.

327. Обозначая через S_1, S_2 и S_3 суммы n_1 первых членов, n_2 первых членов и n_3 первых членов некоторой арифметической прогрессии, показать, что

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0.$$

328. Написать арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, причем сумма первых пяти членов равна $\frac{1}{4}$ суммы следующих пяти членов.

329. Найти арифметическую прогрессию, в которой, сколько бы ни взять членов, всегда сумма их равна утроенному квадрату числа этих членов.

330. Найти сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке единицу.

Геометрическая прогрессия

331. Между числами 1 и 256 вставить три средних геометрических.

332. Найти три числа, составляющих геометрическую прогрессию, если известно, что сумма первого и третьего членов равна 52, а квадрат второго равен 100.

333. Написать несколько первых членов геометрической прогрессии, у которой разность между третьим и первым членами равна 9, а разность между пятым и третьим членами равна 36.

334. Найти четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 27, а произведение средних равно 72.

335. Найти четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних чисел равна 35, а сумма средних равна 30.

336. Определить геометрическую прогрессию, у которой

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=31$$

и

$$u_2+u_3+u_4+u_5+u_6=62.$$

337. В геометрической прогрессии пять членов; сумма их без первого равна $19\frac{1}{2}$, а без последнего равна 13. Вычислить крайние члены прогрессии.

338. Найти первый член и знаменатель такой геометрической прогрессии, состоящей из девяти членов, в которой произведение двух крайних членов равно 2304, а сумма четвертого и шестого членов равна 120.

339. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 126, а их произведение равно 13 824. Найти эти числа.

340. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

341. Доказать, что числа

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2}, \ \ldots$$

образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, и найти предел суммы ее членов.

342. Вычислить выражение

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right],$$

предварительно доказав, что слагаемые, стоящие в квадратных скобках, являются членами геометрической убывающей прогрессии.

343. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой все члены положительны, первый член равен 4, а разность между третьим и пятым членами равна $\frac{32}{81}$.

344. Определить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что сумма ее первого и четвертого членов равна 54, а сумма второго и третьего равна 36.

345. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма всех ее членов, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма всех членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найти эту прогрессию.

346. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов членов той же прогрессии равна 448. Найти первый член и знаменатель.

347. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов всех ее членов равна $\frac{108}{13}$. Написать прогрессию.

348. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов ее членов.

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

349. В некоторой арифметической прогрессии второй член равен 14, а третий равен 16. Требуется составить геометрическую прогрессию, знаменатель которой был бы равен разности арифметической прогрессии, а сумма первых трех членов была бы одна и та же в обеих прогрессиях.

350. Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют первые члены, равные каждый 3, и равные третьи члены. Написать эти прогрессии, если второй член арифметической прогрессии на 6 больше второго члена геометрической прогрессии.

351. В геометрической прогрессии можно ее первый, третий и пятый члены считать за первый, четвертый и шестнадцатый члены некоторой арифметической прогрессии. Определить четвертый член этой арифметической прогрессии, зная, что первый член равен 5.

352. Три числа, сумма которых равна 93, составляют геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать так же, как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

353. В арифметической прогрессии первый член равен 1, а сумма первых семи членов равна 2555. Найти средний член геометрической прогрессии из семи членов, если первый и последний члены совпадают с соответствующими членами указанной арифметической прогрессии.

354. Три числа, составляющих арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к ним прибавить соответственно 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

355. Найти три числа, составляющих геометрическую прогрессию, если известно, что сумма этих чисел равна 26 и что от прибавления к ним соответственно 1, 6 и 3 получатся новые три числа, составляющих арифметическую прогрессию.

356. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из них третий член уменьшить на 64, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Если затем второй член этой арифметической прогрессии уменьшить на 8, то получится геометрическая прогрессия. Определить эти числа.

357. Могут ли три числа одновременно составлять арифметическую и геометрическую прогрессии?

ГЛАВА 6

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

358. Число перестановок из n букв относится к числу перестановок из $n+2$ букв, как 0,1 к 3. Найти n.

359. Число сочетаний из n элементов по 3 в 5 раз меньше числа сочетаний из $n+2$ элементов по 4. Найти n.

360. Найти средний член разложения бинома $\left(\frac{a}{x}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}$.

361. Определить номер того члена разложения бинома $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$, который содержит a^7.

362. Найти номер того члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, который содержит a и b в одинаковых степенях.

363. Упростить выражение $\left(\frac{a+1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{a-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$ и определить член разложения, который не содержит a.

364. Показатель степени одного бинома на 3 более показателя другого. Определить эти показатели, если сумма биномиальных коэффициентов в обоих разложениях вместе равна 144.

365. Найти тринадцатый член разложения $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$, если биномиальный коэффициент третьего члена разложения равен 105.

366. В разложении $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^m$ коэффициенты у четвертого и тринадцатого членов равны между собой. Найти член, не содержащий x.

367. Найти средний член разложения $\left(a\sqrt[-2]{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-3}}{\sqrt{a}}}\right)^m$, если известно, что коэффицнент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена, как $14:3$.

368. Сумма коэффициентов первого, второго и третьего членов разложения $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^m$ равна 46. Найти член, не содержащий x.

369. Найти тот член разложения бинома $\left(x\sqrt{x}+\sqrt[-3]{x}\right)^m$, который содержит x^5, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 128.

370. Найти шестой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен $\frac{1}{i}$, а знаменателем служит комплексное число $(1+i)$.

371. Найти седьмой член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\left(1+\frac{1}{i}\right)$, а первый член равен i.

372. При каком значении n коэффициенты второго, третьего и четвертого членов разложения бинома $(1+x)^n$ составляют арифметическую прогрессию?

373. Коэффициенты пятого, шестого и седьмого членов разложения бинома $(1+x)^n$ составляют арифметическую прогрессию. Найти n.

374. Определить x в выражении $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$ так, чтобы четвертый член разложения бинома равнялся $56a^{5,5}$.

375. Определить x в выражении $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ так, чтобы третий член разложения бинома равнялся 240.

376. Определить x в выражении $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$, в котором отношение седьмого члена от начала в разложении бинома к седьмому члену от конца равно $\frac{1}{6}$.

377. Найти значение x в выражении $(x+x^{\lg x})^5$, третий член разложения которого равен 1 000 000.

378. Найти значение x в выражении $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x+1}}+\sqrt[12]{x}\right]^6$, четвертый член разложения которого равен 200.

379. Определить x в выражении $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\lg\sqrt{x}}\right)^9$ так, чтобы третий член разложения бинома был равен 36 000.

380. Шестой член разложения бинома $\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\lg x}\right)^8$ равен 5600. Найти x.

381. Девятый член разложения бинома

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\lg x}}+x^{2\lg x}\sqrt{x}\right]^{10}$$

равен 450. Найти x.

382. Определить x, если четвертый член разложения бинома $\left(10^{\lg\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[\lg x]{10}}\right)^7$ равен 3 500 000.

383. Определить, при каком значении x в разложении бинома $\left(\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ член, содержащий x в степени вдвое большей, чем в следующем за ним члене, будет на 30 меньше его.

384. Определить, при каком значении x четвертый член разложения бинома $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$ в 20 раз больше показателя бинома, если биномиальный коэффициент 4-го члена в пять раз больше биномиального коэффициента 2-го члена.

385. Найти, при каких значениях x разность между четвертым и шестым членами разложения бинома $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^m$ равна 56, если известно, что показатель бинома m на 20 меньше, чем биномиальный коэффициент третьего члена разложения.

386. Найти, при каких значениях x в разложении бинома $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ сумма третьего и пятого членов равна 135, если сумма биномиальных коэффициентов трех последних членов равна 22.

387. Определить, при каком значении x шестой член разложения бинома $\left[\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\cdot\lg 3}}\right]^m$ равен 21, если известно, что биномиальные коэффициенты второго,

третьего и четвертого членов разложения представляют соответственно первый, третий и пятый члены арифметической прогрессии.

388. Определить, при каком значении x четвертый член разложения бинома $\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{1}{2}\lg\left(6-\sqrt{8x}\right)}+\sqrt[6]{\frac{5^{\lg(x-1)}}{25^{\lg 5}}}\right]^m$ равен 16,8, если известно, что $\frac{14}{9}$ биномиального коэффициента третьего члена разложения и биномиальные коэффициенты четвертого и пятого членов его составляют геометрическую прогрессию.

389. Определить, при каком значении x разность между увеличенным в 9 раз третьим членом разложения бинома $\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^m$ и пятым членом того же разложения равна 240, если известно, что разность между логарифмом утроенного биномиального коэффициента четвертого члена разложения и логарифмом биномиального коэффициента второго члена равна 1.

ГЛАВА 7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ[1]

390. Найти вес орудийного патрона, зная, что заряд весит 0,8 *кг*, вес снаряда составляет $\frac{2}{3}$ веса всего патрона и вес гильзы составляет $\frac{1}{4}$ веса патрона.

391. На заводе 35% всех рабочих — женщины, а остальные — мужчины, которых на заводе на 252 человека больше, чем женщин. Определить общее число рабочих.

---

[1]) Мы не подразделяем задачи на алгебраические и арифметические, так как задачи, решаемые арифметически, всегда можно решить и алгебраически. Наоборот, задачи, решаемые с помощью уравнений, нередко допускают более простое арифметическое решение. В отделе решений мы даем иногда арифметическое, иногда алгебраическое решение, но это не должно ни в какой мере стеснять инициативу учащегося в выборе способа решения.

392. При продаже товара за 1386 руб. получено 10% прибыли. Определить себестоимость товара.

393. Производственная артель, продав продукции на 3348 руб., понесла 4% убытку. Какова себестоимость этой продукции?

394. Если из 225 *кг* руды получается 34,2 *кг* меди, то каково процентное содержание меди в руде?

395. Пачка папирос стоила до снижения цен 2 р. 90 к., а после снижения 2 р. 60 к. На сколько процентов снижена цена?

396. Килограмм товара стоил 6 р. 40 к. После снижения цен он стоил 5 р. 70 к. На сколько процентов была снижена цена на товар?

397. Получаемый при сушке винограда изюм составляет 32% всего веса винограда. Из какого количества винограда получится 2 *кг* изюма?

398. Для экскурсии нужно собрать денег. Если каждый экскурсант внесет по 75 коп., то на расходы не хватит 4,4 руб.; если каждый внесет по 80 коп., то останется 4,4 руб. Сколько человек принимает участие в экскурсии?

399. Несколько человек должны были заплатить поровну 72 руб. Если бы их было на 3 меньше, то каждому пришлось бы заплатить на 4 руб. больше. Сколько их было?

400. Цена 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 405 руб. Однако при 15% скидке на первый том и 10% скидке на второй том приходится платить всего 355 р. 50 к. Определить цену первого и второго томов.

401. Антикварный магазин, купив два предмета за 225 руб., продал их, получив 40% прибыли. Что стоит магазину каждый предмет, если на первом прибыли было получено 25%, а на другом 50%?

402. Морская вода содержит 5% (*по весу*) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 40 *кг* морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

403. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$ *м*. Определить катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}\%$, а другой — на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин сделается равной 14 *м*.

404. В двух мешках находится 140 *кг* муки. Если из первого мешка переложить во второй $12,5\%$ муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

405. Два завода *A* и *B* взялись выполнить заказ в 12 дней. Через два дня завод *A* был закрыт на ремонт, и в дальнейшем над выполнением заказа работал только завод *B*. Зная, что производительность завода *B* составляет $66\frac{2}{3}\%$ от производительности завода *A*, определить, через сколько дней будет выполнен заказ.

406. При выполнении работы по математике 12% учеников класса вовсе не решили задачи, 32% решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

407. От рельса отрезали часть, составляющую 72% его длины. Вес оставшегося куска равен 45,2 *кг*. Определить вес отрезанной части.

408. Сплав весит 2 *кг* и состоит из серебра и меди, причем вес серебра составляет $14\frac{2}{7}\%$ веса меди. Сколько серебра в данном сплаве?

409. Трое рабочих получили вместе 4080 руб. Суммы, полученные первым и вторым, относятся, как $7\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$; сумма, полученная третьим, составляет $43\frac{1}{3}\%$ того, что получил первый. Сколько получил каждый?

410. В трех ящиках имеется всего 64,2 *кг* сахара. Во втором ящике находится $\frac{4}{5}$ того, что есть в первом ящике, в третьем — $42\frac{1}{2}\%$ того, что есть во втором. Сколько сахара в каждом ящике?

411. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 *т* стали с содержанием никеля в 30%?

412. Кусок сплава меди с оловом весом 12 *кг* содержит 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав имел 40% меди?

413. Сколько чистого спирта надо прибавить к 735 *г* шестнадцатипроцентного раствора иода в спирте, чтобы получить десятипроцентный раствор?

414. Сплав из меди и цинка весом в 24 *кг* при погружении в воду потерял в своем весе $2\frac{8}{9}$ *кг*. Определить количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде $11\frac{1}{9}\%$ своего веса, а цинк $14\frac{2}{7}\%$ своего веса.

415. На участке одноколейного железнодорожного пути длиною в 20 *км* надо уложить рельсы. Для укладки имеются рельсы длиной в 25 *м* и 12,5 *м*. Если уложить все рельсы длиною в 25 *м*, то рельсов длиной в 12,5 *м* надо будет добавить 50% от всего их количества. Если же уложить все рельсы длиною по 12,5 *м*, то рельсов длиною в 25 *м* надо добавить $66\frac{2}{3}\%$ от всего количества их. Определить количество рельсов того и другого рода.

416. После выпуска из школы ученики обменялись фотографическими карточками. Сколько было учеников, если они обменялись 870 карточками?

417. Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найти эти числа.

418. Найти три числа, из которых второе больше первого настолько, насколько третье больше второго, если известно, что произведение двух меньших чисел равно 85, а произведение двух бóльших равно 115.

419. Число a есть среднее арифметическое некоторых трех чисел, b есть среднее арифметическое их квадратов. Выразить через a и b среднее арифметическое их попарных произведений.

420. Из прямоугольного жестяного листа с периметром в 96 *см* приготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам его вырезано по квадрату со стороной в 4 *см* и края спаяны. Каких размеров был лист, если объем полученной коробки равен 768 $см^3$?

421. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $2\frac{2}{3}$, а, кроме того, разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

422. Найти двузначное число, зная, что число его единиц двумя больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

423. Определить целое положительное число по следующим данным: если приписать к нему справа цифру 5, то получим число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 3, и в частном получается число, на 16 меньшее делителя.

424. Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа 0 и за ним меньшее число, а к меньшему приписать справа большее число и затем 0, то из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено

на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

425. Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц; по ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего и получил произведение на 2808 меньше истинного. Чему равно истинное произведение?

426. Расстояние между двумя станциями железной дороги 96 *км*. Первый поезд проходит это расстояние на 40 мин. скорее, чем второй. Скорость первого поезда больше скорости второго на 12 *км/час*. Определить скорости обоих поездов.

427. Два лица выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Первый проезжает в час на 2 *км* больше второго и приезжает в B часом раньше, чем второй в A. Расстояние между A и B равно 24 *км*. Сколько километров проезжает каждый в час?

428. Расстояние между A и B по железной дороге 66 *км*, а по водному пути — 80,5 *км*. Из A поезд выходит на 4 часа позже парохода и прибывает в B на 15 мин. раньше парохода. Определить среднюю скорость поезда и парохода, если первая больше второй на 30 *км/час*.

429. Одна мастерская должна была сшить 810 костюмов, другая за тот же срок должна была сшить 900 костюмов; первая закончила выполнение заказа за 3 дня до срока, а вторая — за 6 дней до срока. По скольку костюмов в день шила каждая мастерская, если вторая мастерская шила в день на 4 костюма больше первой?

430. После встречи двух пароходов один из них пошел на юг, а другой на запад. Через два часа после встречи расстояние между ними было 60 *км*. Найти скорость каждого парохода, если известно, что скорость одного из них была на 6 *км/час* больше скорости второго.

431. Собака, находясь в точке A, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 *м* от собаки. Скачок собаки равен 2 *м*, скачок лисицы — 1 *м*. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от точки A собака догонит лисицу?

432. Допуская, что стрелки часов движутся без скачков, узнать, через какое время после того, как часы показывали 4 часа, минутная стрелка догонит часовую стрелку.

433. Поезд вышел со станции A на станцию C через B. Участок от A до B он шел с установленной скоростью, а участок от B до C — с уменьшенной на 25%. На обратном пути участок от C до B он шел с установленной скоростью, а участок от B до A — со скоростью, уменьшенной на 25%. Сколько времени шел поезд от A до C, если известно, что на участок от A до B он затратил столько же времени, сколько на участок от B до C, и что на путь по направлению от A к C он употребил на $\frac{5}{12}$ часа меньше, чем на обратный путь (т. е. от C до A)?

434. Велосипедисту надо было проехать расстояние в 30 *км*. Выехав на 3 мин. позже назначенного срока, велосипедист ехал со скоростью, большею на 1 *км/час*, и прибыл вовремя на место. Определить скорость, с которой ехал велосипедист.

435. Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин. и нагнал опоздание на перегоне в 80 *км*, идя со скоростью, на 10 *км/час* большей, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

436. Поезд должен был пройти 840 *км* в определенное время. На половине пути поезд был задержан у семафора на $\frac{1}{2}$ часа и, для того чтобы прибыть к месту назначения в срок, увеличил скорость на 2 *км/час*. Сколько времени поезд находился в пути?

437. Из двух мест, расстояние между которыми 650 *км*, отправляются два поезда друг другу навстречу. Если оба поезда тронутся с места одновременно, то они встретятся через 10 часов. Если же второй поезд отправится на 4 часа и 20 минут раньше первого, то встреча произойдет через 8 часов после отправления первого. Определить среднюю скорость каждого поезда.

438. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций A и B, расстояние между которыми 600 *км*. Первый из них приходит на станцию B на 3 часа раньше, чем второй на станцию A. В то время, как первый делает 250 *км*, второй проходит 200 *км*. Найти скорость каждого поезда.

439. Дачник, идущий к поезду, пройдя за первый час 3,5 *км*, рассчитал, что, двигаясь с такой скоростью, он опоздает на 1 час. Поэтому он остальной путь проходит со скоростью 5 *км/час* и приходит за 30 мин. до отхода поезда. Определить, какой путь должен был пройти дачник.

440. Расстояние от Москвы до Мытищ по шоссе 19 *км*. Из Москвы в Мытищи выехал велосипедист с некоторой постоянной скоростью; через 15 мин. после него в том же направлении вышел автомобиль; он через 10 мин. после выхода нагнал велосипедиста и продолжал путь до Мытищ, где, не останавливаясь, повернул обратно и через 50 мин. после своего выхода из Москвы встретил велосипедиста вторично. Определить скорости автомобиля и велосипедиста.

441. Со станции A вышел в 5 час. утра почтовый поезд по направлению к станции B, отстоящей от A на 1080 *км*. В 8 час. утра вышел со станции B по направлению к A скорый поезд, который проходил в час на 15 *км* больше, чем почтовый поезд. Когда встретились поезда, если их встреча произошла в середине пути AB?

442. Расстояние между A и B равно 78 *км*. Из A выезжает велосипедист по направлению к B. Через 1 час ему навстречу отправляется из B другой велосипедист, делающий в час на 4 *км* больше первого. Встреча произошла на расстоянии 36 *км* от B. Сколько времени до встречи ехал каждый из них и с какой скоростью?

443. Два пешехода вышли одновременно друг другу навстречу и встретились через 3 часа 20 мин. Во сколько времени пройдет все расстояние каждый из них, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 час. позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

444. Два туриста идут друг другу навстречу — один из пункта A, а другой из пункта B. Первый выходит из A на 6 час. позже, чем второй из пункта B, и при встрече оказывается, что он прошел на 12 *км* меньше второго. Продолжая после встречи путь с той же скоростью, первый приходит в B через 8 час., а второй в A — через 9 час. Определить расстояние AB и скорости обоих туристов.

445. Вылетев одновременно, дирижабль и самолет летят навстречу друг другу. К моменту встречи дирижабль прошел на 100 *км* меньше самолета и на место отлета самолета приходит через 3 часа после встречи. Самолет прибывает на аэродром дирижабля через 1 час 20 мин. после встречи. Найти расстояние между аэродромами и скорости самолета и дирижабля.

446. Из двух мест A и B вышли одновременно два пешехода навстречу друг другу. При встрече оказалось, что первый прошел на a *км* больше, чем второй. Если они будут продолжать путь, то, идя с прежней скоростью, первый придет в B через m часов, а второй придет в A через n часов после встречи. Найти скорость каждого пешехода.

447. По окружности движутся два тела; первое пробегает окружность на 5 сек. скорее второго. Если они движутся по одному направлению, то сходятся через каждые 100 сек. Какую часть окружности (в градусах) пробегает каждое тело в 1 сек.?

448. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, они встречались бы через каждые 8 мин. Далее известно, что при движении в противоположных направлениях

расстояние (по окружности) между сближающимися телами уменьшилось бы с 40 *м* до 26 *м* за 24 сек.

Сколько метров в минуту проходит каждое тело и какова длина окружности?

449. По окружности длиной c равномерно и в одном направлении движутся две точки, которые сходятся через каждые t сек. Найти скорость каждой точки, зная, что одна из них пробегает всю окружность на n сек. быстрее другой.

450. Расстояние между двумя городами по реке 80 *км*. Пароход совершает этот путь в два конца в 8 час. 20 мин. Определить скорость парохода в стоячей воде, считая скорость течения реки 4 *км/час*.

451. Моторная лодка спустилась по течению на 28 *км* и тотчас же вернулась назад; на путь туда и обратно ей потребовалось 7 час. Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 *км/час*.

452. Некто проехал в лодке по реке из города A в город B и обратно, употребив на это 10 час. Расстояние между городами 20 *км*. Найти скорость течения реки, зная, что он проплывал 2 *км* против течения в такое же время, как 3 *км* по течению реки.

453. Пароход идет из Киева в Днепропетровск в течение двух суток, обратно — в течение трех суток. Определить, сколько времени будет плыть плот из Киева в Днепропетровск.

454. Расстояние между точками A и B равно 301 *м*; из A в B равномерно движется некоторое тело; достигнув точки B, оно тотчас же возвращается назад. Второе тело, выходящее из точки B по направлению к A через 11 сек. после выхода первого, движется тоже равномерно, но медленнее. На пути от B к A оно встречается с первым телом дважды: через 10 сек. и через 45 сек. после своего выхода из B.

Найти скорость движения каждого тела.

455. Дорога из города A в город B сначала подымается в гору на протяжении 3 *км*, потом идет по ровному месту на протяжении 5 *км*, после спускается под гору на протяжении 6 *км*. Посыльный, уйдя из A в B и пройдя полпути, обнаружил, что взял не все пакеты. Он вернулся обратно и через 3 часа 36 мин. после своего выхода из A вернулся в A. Выйдя из A вторично, он прошел весь путь до B за 3 часа 27 мин. и обратный путь в A — за 3 часа 51 мин. С какой скоростью шел посыльный в гору, по ровному месту и под гору, если считать эти скорости постоянными?

456. Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа более установленной для нее нормы, то окончит работу ранее намеченного срока на 3 дня; если же будет печатать по 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней ранее срока. Сколько листов она должна была перепечатать и в какой срок?

457. Рабочий изготовил в назначенный ему срок некоторое число одинаковых деталей. Если бы он ежедневно изготовлял их на 10 штук более, то выполнил бы эту работу на $4\frac{1}{2}$ дня раньше срока, а если бы он делал в день на 5 деталей меньше, то опоздал бы на 3 дня против назначенного срока. Сколько деталей и в какой срок он выполнил?

458. Машинистка должна была выполнить работу в определенный срок, ежедневно печатая определенное количество листов. Она рассчитала, что если будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной нормы, то окончит работу раньше намеченного срока на 2 дня, если же будет печатать на 60% больше нормы, то, закончив работу на 4 дня раньше срока, напечатает на 8 листов больше намеченной работы. Сколько листов она должна была печатать в день и в какой срок окончить работу?

459. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу в 8 час. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 час. скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. Во сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить работу?

460. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 час. Одна первая труба заполняет его на 5 час. скорее, чем одна вторая. Во сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

461. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 час., а второй 4 часа, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили что им остается выполнить $\frac{1}{18}$ всей работы. Во сколько часов каждый из них, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

462. Пароход грузится подъемными кранами. Сначала начали грузить 4 крана одинаковой мощности. После того как они проработали 2 часа, к ним присоединили еще 2 крана меньшей мощности, и после этого погрузка была окончена через 3 часа. Если бы все краны начали работать одновременно, то погрузка была бы окончена в 4,5 часа. Определить, во сколько часов мог бы окончить погрузку один кран большей и один кран меньшей мощности.

463. Для строительства требовалось в течение 8 час. перевезти со станции строительный материал. Для перевозки было направлено сначала 30 трехтонных машин. После двухчасовой работы этих машин было послано в помощь им еще 9 пятитонных машин, совместно с которыми перевозка и была закончена в срок. Если бы сначала были направлены пятитонные машины, а спустя 2 часа — трехтонные, то за указанный срок было бы вывезено только $\frac{13}{15}$ всего груза. Определить, во сколько часов могла бы перевезти весь этот груз одна трехтонная машина, одна пятитонная и в какой срок перевезли бы весь груз 30 пятитонных машин.

464. Двум машинисткам было поручено выполнить некоторую работу. Вторая из них приступила к работе на 1 час позднее первой. Через 3 часа после того, как первая начала работу, им оставалось выполнить еще $\frac{9}{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всей работы. Во сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить всю работу?

465. Со станций *A* и *B* вышли два поезда навстречу друг другу, причем второй из них вышел на полчаса позже первого. Через 2 часа после выхода первого поезда расстояние между поездами составляло $\frac{19}{30}$ всего пути между *A* и *B*. Продолжая движение, они встретились на середине пути между *A* и *B*. Сколько времени потребуется каждому поезду, чтобы пройти весь путь между конечными станциями?

466. Для промывания фотографических негативов служит ванна, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, размерами 20 *см* $\times$ 90 *см* $\times$ 25 *см*. Для постоянного смешения воды в ванне в нее поступает вода через один кран и одновременно вытекает через другой. Для того чтобы опорожнить посредством второго крана полную ванну, требуется на 5 мин. меньше времени, чем для того, чтобы наполнить ее первым краном, если закрыть второй. Если же открыть оба крана, то полная ванна опорожнится в 1 час. Найти количество воды, пропускаемое каждым краном в 1 мин.

467. При постройке здания требовалось вынуть 8000 *м*^{3} земли в определенный срок. Работа была закончена раньше срока на 8 дней вследствие того, что бригада землекопов ежедневно перевыполняла план на 50 *м*^{3}. Определить, в какой срок должна была быть окончена работа, и найти ежедневный процент перевыполнения.

468. Ремонт пути производили две бригады. Каждая из них отремонтировала по 10 *км*, несмотря на то, что вторая бригада работала на один день меньше первой. Сколько километров пути ремонтировала каждая бригада в день, если обе вместе ремонтировали в день 4,5 *км*?

469. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу в 12 час. Если бы сначала первый сделал половину этой работы, а затем другой остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 час. За какое время мог выполнить эту работу каждый в отдельности?

470. Два трактора различной мощности, работая совместно, вспахали поле за t дней. Если бы сначала работал только один трактор и вспахал бы половину поля, а затем один второй закончил бы работу, то при таких условиях поле было

бы вспахано за k дней. Во сколько дней каждый трактор, работая отдельно, может вспахать всё поле?

471. Для углубления фарватера при входе в гавань работали 3 разных землечерпалки. Если бы действовала только первая из них, то на работу потребовалось бы на 10 дней больше времени; если бы работала только вторая, то работа затянулась бы на 20 лишних дней. При работе одной лишь третьей землечерпалки углубление фарватера заняло бы в шесть раз больше времени, чем при одновременном действии всех трёх машин. Сколько времени потребуется для выполнения всей работы каждой землечерпалкой в отдельности?

472. Двое рабочих, из которых второй начинает работать $1\frac{1}{2}$ днями позже первого, могут выполнить работу в 7 дней. Если бы эту работу выполнял каждый отдельно, то первому потребовалось бы на 3 дня больше, чем второму. Во сколько дней каждый из них отдельно выполнит эту работу?

473. При совместной работе двух тракторов различной мощности колхозное поле было вспахано в 8 дней. Если бы половину поля вспахать сначала одним трактором, то при дальнейшей работе двух тракторов вся работа была бы закончена в 10 дней. Во сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором отдельно?

474. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 6 час., если бы начали ее одновременно, но они приступали к работе один за другим через одинаковые промежутки времени. Через такой же промежуток времени, после выхода на работу последнего участника, канава была вырыта, причём каждый из участников оставался на работе до конца.

Сколько времени они рыли канаву, если приступивший к работе первым проработал в 5 раз больше времени, чем приступивший последним?

475. Трое рабочих могут совместно выполнить некоторую работу за t час. Первый из них, работая один, может выполнить эту работу вдвое скорее третьего и на один час скорее второго. Во сколько времени каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу?

476. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, какое нужно было бы, чтобы наполнить бассейн, открыв только второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна одним первым краном. После этого оказалось наполненным $\frac{13}{18}$ бассейна. Вычислить, сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 3 часа 36 мин.

477. При постройке электростанции бригада каменщиков должна была в определенный срок уложить 120 тысяч кирпичей. Бригада выполнила работу на 4 дня раньше срока. Определить, какова была норма ежедневной кладки кирпича и сколько укладывали кирпичей ежедневно в действительности, если известно, что бригада за 3 дня укладывала на 5000 кирпичей больше, чем полагалось укладывать за 4 дня по норме.

478. В трех сосудах налита вода. Если $\frac{1}{3}$ воды из первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{4}$ воды, оказавшейся во втором, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{10}$ воды, оказавшейся в третьем, перелить в первый, то в каждом сосуде окажется по 9 *л*. Сколько воды было в каждом сосуде?

479. Из бака, наполненного чистым спиртом, вылили часть спирта и долили тем же количеством воды; потом из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось 49 *л* чистого спирта. Вместимость бака 64 *л*. Сколько спирта вылили в первый раз и сколько во второй раз [1])?

480. Сосуд в 20 *л* наполнен спиртом. Из него выливают некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть второго сосуда водой, дополняют этой

---

[1]) Задача составлена в предположении, что объем смеси равен сумме объемов спирта и воды. На самом деле он несколько меньше.

смесью первый сосуд. Затем из первого отливают $6\frac{2}{3}$ *л* во второй, после чего в обоих сосудах содержится одинаковое количество спирта. Сколько отлито первоначально спирта из первого сосуда во второй?

481. Сосуд ёмкостью в 8 *л* наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось кислорода 9%. Определить, по скольку литров выпускалось каждый раз из сосуда.

482. Две колхозницы принесли на рынок вместе 100 яиц. Продав яйца по разной цене, обе выручили одинаковые суммы. Если бы первая продала столько яиц, сколько вторая, то она выручила бы 72 руб., если бы вторая продала столько яиц, сколько первая, то она выручила бы 32 руб. Сколько яиц было у каждой?

483. Две колхозницы, имея вместе a *л* молока, получили при продаже его одинаковые суммы, продавая молоко по разной цене. Если бы первая продала столько, сколько вторая, то получила бы m руб., а если бы вторая продала столько, сколько первая, то получила бы n руб. $(m > n)$. Сколько литров молока было у каждой колхозницы?

484. При испытании на экономичность двух двигателей внутреннего сгорания одинаковой мощности было установлено, что один из них израсходовал 600 *г* бензина, а второй, работавший на 2 часа меньше, 384 *г*. Если бы первый двигатель расходовал в час столько бензина, сколько второй, а второй, наоборот, столько, сколько первый, то за то же время работы расход бензина в обоих двигателях был бы одинаковым. Сколько бензина в час расходует каждый двигатель?

485. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 *кг* нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11?

486. Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении 2 : 3, а другая — в отношении 3 : 7. По скольку вёдер нужно взять из каждой бочки, чтобы составить 12 вёдер смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении 3 : 5?

487. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1 : 2, а другой содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

488. При вращении двух колёс, соединённых бесконечным ремнём, меньшее из них делает в минуту на 400 оборотов больше второго. Большее колесо делает 5 оборотов в промежуток времени на 1 сек. больше, чем время 5 оборотов меньшего. Сколько оборотов делает каждое колесо в минуту?

489. На протяжении 18 *м* переднее колесо экипажа делает на 10 оборотов больше заднего. Если окружность переднего колеса увеличить на 6 *дм*, а окружность заднего уменьшить на 6 *дм*, то на том же протяжении переднее колесо сделает на 4 оборота больше заднего. Найти окружности обоих колёс.

490. Баржа с грузом в 600 *т* была разгружена в три дня, причём в первый и третий дни было выгружено $\frac{2}{3}$ всего груза. Во второй день было выгружено меньше, чем в первый, а в третий меньше, чем во второй; при этом разность между процентом уменьшения выгрузки в третий день по отношению к выгрузке второго дня и процентом уменьшения выгрузки второго дня по отношению к выгрузке первого дня была равна 5. Определить, сколько было выгружено каждый день и процент уменьшения выгрузки во второй и в третий дни.

491. Два раствора, из которых первый содержал 800 *г* безводной серной кислоты, а второй 600 *г* безводной серной кислоты, соединили вместе и получили 10 *кг* нового раствора серной кислоты. Определить вес первого и второго растворов, вошедших в смесь, если известно, что процент содержания безводной серной кислоты в первом растворе на 10 больше, чем процент содержания безводной серной кислоты во втором.

492. Имелось два разных сплава меди. Процент содержания меди в первом сплаве был на 40 меньше, чем процент содержания меди во втором сплаве. После того как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что меди в первом сплаве было 6 *кг*, а во втором 12 *кг*.

493. Два поезда—товарный длиной в 490 *м* и пассажирский длиной в 210 *м* — двигались навстречу друг другу по двум параллельным путям. Машинист пассажирского поезда заметил товарный поезд, когда он находился от него на расстоянии 700 *м*; через 28 сек. после этого они встретились. Определить скорость каждого поезда, если известно, что товарный поезд употребляет времени на прохождение мимо светофора на 35 сек. больше пассажирского.

494. Товарный поезд состоит из двухосных и четырёхосных цистерн, гружённых нефтью. Вес поезда 940 *т*. Требуется определить число четырёхосных и двухосных цистерн, а также их вес, если известно, что число двухосных на 5 больше числа четырёхосных; каждая четырёхосная цистерна весит в три раза больше, чем одна двухосная, и чистый вес нефти (без веса цистерн) во всех четырёхосных цистернах больше веса всех гружёных двухосных цистерн на 100 *т*. Вес нефти в четырёхосной цистерне равен 40 *т*, а в двухосной составляет 0,3 веса нефти в четырёхосной.

495. Две машины, работающие с двух сторон тоннеля, должны закончить проходку в 60 дней. Если первая машина выполнит 30% всей работы, которую за это время она должна была сделать, а вторая $26\frac{2}{3}\%$ своей работы, то обе они пройдут 60 *м* тоннеля. Если бы первая машина выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы второй машины по проходке этого тоннеля, а вторая — 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого времени на 6 дней больше, чем второй. Определить, сколько метров в день проходит каждая машина.

496. Две бригады, работая вместе, закончили ремонт участка пути в 6 дней. Одной первой бригаде для выполнения 40% всей работы потребовалось бы времени на 2 дня больше, чем одной второй бригаде для выполнения $13\frac{1}{3}\%$ всей работы. Определить, во сколько дней могла бы отремонтировать каждая бригада отдельно весь участок.

497. С пристани на станцию должно быть перевезено 690 *т* груза пятью трехтонными и десятью полуторатонными грузовиками. После нескольких часов работы все грузовики перевезли $\frac{25}{46}$ всего груза. Чтобы выполнить перевозку в срок, оставалось времени для перевозки остального груза на 2 часа меньше, чем было затрачено. Перевозка была закончена в срок потому, что шоферы стали за час делать на одну поездку больше, чем раньше. Определить, за сколько часов был перевезен весь груз, а также сколько поездок в час делали машины первоначально, если полуторатонка делала на одну поездку в час больше трехтонки.

Примечание. Считается, что на одну трехтонную машину грузилось полностью 3 *т*, а на полуторатонку $1\frac{1}{2}$ *т*.

498. Спортивная площадка имеет форму прямоугольника со сторонами a *м* и b *м*. Площадка окаймлена дорожкой, внешний край которой имеет тоже форму прямоугольника, стороны которого параллельны сторонам площадки и одинаково отстоят от нее. Площадь дорожки равна площади спортивной площадки. Найти ширину дорожки.

499. В зрительном зале имеется a стульев, расположенных рядами по одинаковому числу стульев в каждом ряду. Если в каждом ряду добавить по b стульев, а число рядов уменьшить на c рядов, то общее число мест в зрительном зале увеличится на одну десятую прежнего количества стульев. Сколько было стульев в каждом ряду?

500. Два тела, находящиеся на расстоянии d *м* друг от друга, движутся навстречу и встречаются через a сек. Если они будут двигаться в одну сторону с теми же скоростями, то встретятся через b сек. Определить скорость движения каждого тела.

501. Из пунктов A и B, расстояние между которыми d *км*, навстречу друг другу выехали одновременно мотоциклист и велосипедист. Через 2 часа они встретились и, не останавливаясь, продолжали путь. Мотоциклист прибыл в B на t часов раньше, чем велосипедист в A. Найти скорости мотоциклиста и велосипедиста.

502. Из пункта A по направлению в B вышел пешеход. Через a часов из B навстречу пешеходу выехал велосипедист; через b часов после своего выезда он встретил пешехода. Сколько времени надо велосипедисту и сколько пешеходу, чтобы пройти весь путь между A и B, если велосипедисту на это требуется на c часов меньше, чем пешеходу?

503. Поезд A, скорость которого v *км/час*, выходит после поезда B, скорость которого v_1 *км/час*. Задержка выхода поезда A рассчитана так, чтобы оба поезда одновременно прибыли к месту назначения. Поезд B, пройдя $\frac{2}{3}$ пути, вынужден был наполовину уменьшить свою скорость. Вследствие этого поезда встретились за a *км* до места назначения. Определить длину пути до станции назначения.

504. Вкладчик на свои сбережения через год получил 15 руб. начисления процентных денег. Добавив еще 85 руб., он оставил деньги ещё на год. По истечении года вклад вместе с процентами составил 420 руб. Какая сумма была положена первоначально и какой процент даёт сберкасса?

505. Производительность станка A составляет m % от суммы производительностей станков B и C, а производительность станка B составляет n % от суммы производительностей станков A и C. Какой процент составляет производительность станка C по отношению к суммарной производительности станков A и B?

506. Прирост продукции на заводе по сравнению с предыдущим годом за 1-й год составлял p %, за 2-й год q %. Какой должен быть процент прироста продукции за 3-й год, чтобы средний годовой прирост продукции за три года был равен r %?

507. Из общего количества товара a % продано с прибылью в p %, а из оставшейся части b % продано с прибылью в q %. С какой прибылью продана вся остальная часть товара, если общий процент прибыли составлял r %?

508. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m *кг* и n *кг*, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

509. Некоторое количество денег было разложено на n кучек. После этого из первой кучки переложили во вторую $\frac{1}{n}$-ю часть бывших в первой кучке денег. Затем из второй кучки $\frac{1}{n}$-ю часть оказавшихся в ней после перекладывания денег переложили в третью кучку. Далее $\frac{1}{n}$-ю часть денег, получившихся после этого в третьей кучке, переложили в четвёртую и т. д. Наконец, из n-й кучки $\frac{1}{n}$-ю часть оказавшихся в ней после предшествующего перекладывания денег переложили в первую кучку. После этого в каждой кучке стало по A руб. Сколько денег в каждой кучке было до перекладывания (можно ограничиться случаем $n=5$)?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

ГЛАВА 8
ПЛАНИМЕТРИЯ

510. Периметр прямоугольного треугольника равен 132, а сумма квадратов сторон треугольника — 6050. Найти стороны.

511. В параллелограмме даны острый угол α и расстояния m и p от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Определить диагонали и площадь параллелограмма.

512. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 *см*, а высота 20 *см*. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.

513. В треугольнике основание равно 60 *см*, высота 12 *см* и медиана, проведённая к основанию, 13 *см*. Определить боковые стороны.

514. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом b построены квадраты во внешние стороны. Центры этих квадратов соединены между собою прямыми линиями. Найти площадь получившегося треугольника.

515. Стороны квадрата разделены в отношении m к n, причём к каждой вершине прилежит один большой и один малый отрезок. Последовательные точки деления соединены прямыми. Найти площадь полученного четырёхугольника, если сторона данного квадрата равна a.

516. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы по 30°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

517. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого квадрата. Определить отрезки, на которые стороны первого квадрата рассекаются вершинами второго квадрата, если площадь второго квадрата равна $^{25}/_{49}$ площади первого квадрата.

518. В прямоугольник со сторонами 3 *м* и 4 *м* вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся, как 1 : 3. Найти стороны этого прямоугольника.

519. В равносторонний треугольник ABC, сторона которого a, вписан другой равносторонний треугольник LMN, вершины которого лежат на сторонах первого треугольника и делят каждую из них в отношении 1 : 2. Определить площадь треугольника LMN.

520. Найти стороны прямоугольного треугольника по данным: периметру $2p$ и высоте h.

521. В равнобедренном треугольнике с основанием $2a$ и периметром $2P$ провести прямую, параллельную основанию, так, чтобы она отсекла трапецию периметра $2p$ $(2a < p < P)$.

522. Дана прямоугольная трапеция с основаниями a, b и меньшей боковой стороной c. Определить расстояния точки пересечения диагоналей трапеции от основания a и от меньшей боковой стороны.

523. Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его 12 *см*, а высота, опущенная на основание, равна прямой, соединяющей середины основания и боковой стороны.

524. Периметр ромба содержит $2p$ *см*, сумма диагоналей его m *см*. Найти площадь ромба.

525. Большее основание трапеции a, меньшее b; углы при большем основании 30° и 45°. Найти площадь трапеции.

526. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 *см* и 44 *см*, а непараллельные — 17 *см* и 25 *см*.

527. Найти площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

528. Основание треугольника делится высотою на части в 36 *см* и 14 *см*. Перпендикулярно к основанию проведена прямая, делящая площадь данного треугольника пополам. На какие части эта прямая разбила основание треугольника?

529. Высота треугольника равна 4; она делит основание на две части, относящиеся, как 1 : 8. Найти длину прямой, параллельной высоте и делящей треугольник на равновеликие части.

530. Треугольник ABC разбит на три равновеликие фигуры прямыми, параллельными стороне AC. Вычислить, на какие части разбили эти прямые сторону AB, равную a.

531. Прямая, параллельная основанию треугольника, площадь которого равна S, отсекает от него треугольник с площадью, равной q. Определить площадь четырёхугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвёртая лежит на основании большего треугольника.

532. Параллельные стороны трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

533. Из вершины тупого угла ромба опущены перпендикуляры на его стороны. Длина каждого перпендикуляра равна a, расстояние между их основаниями равно b. Определить площадь ромба.

534. Определить площадь треугольника, если две стороны соответственно равны 27 *см* и 29 *см*, а медиана третьей стороны равна 26 *см*.

535. Даны две стороны b и c треугольника и его площадь $S=\frac{2}{5}bc$. Найти третью сторону a треугольника.

536. По основаниям a и b и боковым сторонам c и d трапеции определить её диагонали m и n.

537. Дан параллелограмм, в котором острый угол 60°. Определить отношение длин сторон, если отношение квадратов длин диагоналей параллелограмма равно $\frac{19}{7}$.

538. Внутри равностороннего треугольника взята произвольная точка, из которой опущены перпендикуляры на все его стороны. Доказать, что сумма этих трёх перпендикуляров равна высоте треугольника.

539. Из точки вне круга проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47 *м*, а внешний 9 *м*; внутренний отрезок второй секущей на 72 *м* больше внешнего её отрезка. Определить длину второй секущей.

540. Из точки, отстоящей от центра круга на m *см*, проведены касательные к кругу. Расстояние между точками касания равно a *см*. Определить радиус круга.

541. Внутри круга, радиус которого равен 13 *см*, дана точка M, отстоящая от центра круга на 5 *см*. Через точку M проведена хорда $AB = 25$ *см*. Определить длину отрезков, на которые хорда AB делится точкой M.

542. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α. Определить отношение радиусов кругов вписанного и описанного.

543. Стороны треугольника: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Две из них (a и b) служат касательными к кругу, центр которого лежит на третьей стороне. Определить радиус круга.

544. Около круга радиуса R описан равнобедренный треугольник с углом 120°. Определить его стороны.

545. На большем катете, как на диаметре, описана полуокружность. Определить длину этой полуокружности, если меньший катет равен 30 *см*, а хорда, соединяющая вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы с полуокружностью, равна 24 *см*.

546. В прямоугольный треугольник вписан полукруг так, что диаметр его лежит на гипотенузе и центр его делит гипотенузу на отрезки, равные 15 *см* и 20 *см*. Определить длину дуги полукруга, заключённой между точками касания его с катетами.

547. В равнобедренном треугольнике с основанием, равным 4 *см*, и высотой, равной 6 *см*, на боковой стороне, как на диаметре, построена полуокружность. Точки пересечения её с основанием и боковой стороной соединены прямой. Определить площадь получившегося четырёхугольника, вписанного в полукруг.

548. Дан равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h. В него вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная основанию. Найти радиус окружности и длину отрезка касательной, заключённого между сторонами треугольника.

549. Из точки, лежащей вне круга, проведены две секущие, внешние части которых содержат по 2 *м*. Определить площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки пересечения секущих с окружностью, зная, что длина двух его противоположных сторон равна 6 *м* и 2,4 *м*.

550. Стороны треугольника равны 6 *см*, 7 *см*, 9 *см*. Из трёх вершин, как из центров, проведены взаимно касающиеся окружности, причём окружность, центр которой лежит в вершине наименьшего угла треугольника, имеет с остальными двумя окружностями внутреннее касание, а остальные две между собой имеют внешнее касание. Определить радиусы трёх окружностей.

551. Внешняя касательная двух окружностей радиусов 5 *см* и 2 *см* в $1\frac{1}{2}$ раза больше их внутренней касательной. Определить расстояние между центрами этих окружностей.

552. Расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 17 *см* и 10 *см*, равно 21 *см*. Определить расстояние центров от точки, в которой прямая центров пересекается с общей касательной окружностей.

553. К двум окружностям радиусов R и r, находящимся в положении внешнего касания, проведены их общие касательные — внутренняя и две внешние. Определить длину отрезка внутренней касательной, заключенного между внешними касательными.

554. К двум окружностям радиусов R и r, находящимся в положении внешнего касания, проведены их общие внешние касательные. Определить площадь трапеции, ограниченной этими касательными и хордами, соединяющими точки касания.

555. Две окружности радиусов R и r находятся в положении внешнего касания. К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, и в образовавшийся при этом криволинейный треугольник вписана окружность. Найти ее радиус.

556. Через одну и ту же точку окружности проведены две хорды, равные a и b. Если соединить их концы, то получится треугольник площади S. Определить радиус окружности.

557. В круге радиуса R по одну сторону от центра проведены три параллельные между собой хорды, соответственно равные сторонам правильных вписанных в круг шестиугольника, четырехугольника и треугольника. Определить отношение площади той части круга, которая заключена между второй и третьей хордами, к площади той части круга, которая заключена между первой и второй хордами.

558. Определить площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, равные 25,6 *см* и 14,4 *см*.

559. В ромб со стороной a и острым углом 60° вписана окружность. Определить площадь прямоугольника, вершины которого лежат в точках касания окружности со сторонами ромба.

560. К окружности радиуса R проведены 4 касательные, образующие ромб, бóльшая диагональ которого равна $4R$. Определить площадь каждой из фигур, ограниченных двумя касательными, проведенными из общей точки, и меньшей дугой окружности, лежащей между точками касания.

561. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\frac{\pi}{6}$.

562. Около круга радиуса 2 *см* описана равнобочная трапеция с площадью 20 *см*^{2}. Найти стороны трапеции.

563. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большей из параллельных сторон острые углы α и β. Определить радиус круга, если площадь трапеции Q.

564. Около круга радиуса r описана прямоугольная трапеция, наименьшая из сторон которой равна $\frac{3}{2}$. Определить площадь трапеции.

565. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 2 *см* и 4 *см*. Найти площадь трапеции.

566. В равносторонний треугольник со стороной a вписан круг. Затем в этот треугольник вписаны ещё три круга, касающиеся первого круга и сторон треугольника, и ещё три круга, касающиеся только что вписанных кругов и сторон треугольника, и т. д. Найти сумму площадей всех вписанных кругов[1]).

567. Треугольник ABC вписан в окружность; через вершину A проведена касательная до пересечения с продолженной стороной BC в точке D. Из вершин B и C опущены перпендикуляры на касательную, меньший из которых равен 6 *см*. Определить площадь трапеции, образованной этими перпендикулярами, стороной BC и отрезком касательной, если $BC = 5$ *см*, $AD = 5\sqrt{6}$ *см*.

568. В правильный треугольник, сторона которого равна a, вписаны три равных круга, касательных друг другу. Каждый из них касается двух сторон данного треугольника. Определить радиусы этих кругов.

---

[1]) То-есть предел суммы площадей вписанных кругов.

569. Внутри равностороннего треугольника со стороной a расположены три равных круга, касающиеся сторон треугольника и взаимно касающиеся друг друга. Найти площадь криволинейного треугольника, образованного дугами взаимно касающихся кругов (вершинами служат точки взаимного касания).

570. Внутри квадрата со стороной a расположены четыре равных круга; каждый из них касается двух смежных сторон квадрата и двух кругов (из числа остальных трёх). Найти площадь криволинейного четырёхугольника, образованного дугами касающихся кругов (вершинами служат точки касания кругов).

571. Найти площадь сегмента, если периметр его равен p, а дуга содержит 120°.

572. В треугольник вписан круг радиусом 4 *см*. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 *см* и 8 *см*. Найти длины двух других сторон.

573. Перпендикуляр, опущенный из вершины угла при основании равнобедренного треугольника на противоположную сторону, делит последнюю в отношении $m : n$. Найти углы треугольника.

574. Хорда, перпендикулярная к диаметру, делит его в отношении $m : n$. Определить каждую из дуг [1], на которые разделится окружность хордой и диаметром.

575. Определить угол параллелограмма, если даны две его высоты h_1 и h_2 и периметр $2p$.

576. В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся как 40 : 41.

577. В прямоугольном треугольнике гипотенуза c, а один из острых углов равен α. Определить радиус вписанного круга.

---

[1] В дуговых единицах.

578. Стороны треугольника равны 25 *см*, 24 *см* и 7 *см*. Определить радиусы вписанного и описанного кругов.

579. Определить радиусы двух внешне касающихся кругов, если расстояние между их центрами равно d, а угол между общими внешними касательными равен φ.

580. Определить угол ромба, зная его площадь Q и площадь вписанного в него круга S.

581. В круг вписан правильный $2n$-угольник; вокруг этого же круга описан правильный n-угольник. Площади этих многоугольников отличаются друг от друга на P. Определить радиус круга.

582. Середины сторон правильного n-угольника соединены прямыми, образующими новый правильный n-угольник, вписанный в данный. Найти отношение их площадей.

583. Около правильного n-угольника со стороной a описана окружность и в него вписана окружность. Определить площадь кольца между этими окружностями и ширину его.

584. В сектор радиуса R с центральным углом α вписан круг. Определить его радиус.

585. К кругу радиуса R проведены из одной точки две касательные, составляющие между собой угол 2α. Определить площадь между этими касательными и дугой круга.

586. Ромб с острым углом α и стороной a разделён прямыми, исходящими из вершины этого острого угла, на три равновеликие части. Определить длины отрезков этих прямых.

587. Внутри угла 60° расположена точка на расстояниях a и b от его сторон. Найти расстояние этой точки до вершины данного угла.

588. В равнобедренном треугольнике длины боковых сторон равны a каждая, а длина отрезка прямой, проведённого из вершины треугольника к его основанию и делящего угол между равными сторонами в отношении $1:2$, равна t. Определить площадь этого треугольника.

589. Определить площадь треугольника, если даны a и b — длины его сторон и t — длина биссектрисы угла между этими сторонами.

590. Зная углы треугольника, определить угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины какого-нибудь угла.

591. Сторона правильного треугольника равна a. Из центра его радиусом $\frac{a}{3}$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

592. В прямоугольной трапеции, высота которой равна h, на стороне, не перпендикулярной к основанию, как на диаметре, описана окружность, и оказалось, что она касается противоположной стороны трапеции. Найти площадь прямоугольного треугольника, у которого катеты — основания трапеции.

593. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

594. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружности.

595. Определить угол прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга, как 5 : 2.

596. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют также квадрат.

ГЛАВА 9

МНОГОГРАННИКИ

597. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда a и b. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

598. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d, составляет с боковым ребром призмы угол α. Определить объём призмы.

599. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды, длиной m, наклонено к плоскости основания под углом α. Найти объём пирамиды.

600. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен V. Угол наклона её бокового ребра к плоскости основания равен α. Найти боковое ребро пирамиды.

601. Боковая поверхность правильной четырёхугольной пирамиды содержит S *см*², высота пирамиды H *см*. Найти сторону основания пирамиды.

602. Найти объём и боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если даны боковое ребро l и диаметр d круга, вписанного в основание пирамиды.

603. Найти высоту тетраэдра[1]), объём которого равен V.

604. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и острый угол — α. Бо́льшая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти объём параллелепипеда.

605. Диагонали прямого параллелепипеда равны 9 *см* и $\sqrt{33}$ *см*. Периметр его основания равен 18 *см*. Боковое ребро равно 4 *см*. Определить полную поверхность и объём параллелепипеда.

606. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды l, а высота пирамиды h. Определить двугранный угол при основании.

---

[1]) Под тетраэдром здесь понимается правильный четырёхгранник (иногда тетраэдром называется произвольная треугольная пирамида).

607. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, зная угол α её бокового ребра с плоскостью основания и площадь S её диагонального сечения. Найти также угол, образуемый боковой гранью с плоскостью основания.

608. Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого 540°. Определить объём этой пирамиды, зная, что боковое ребро её, равное l, наклонено к плоскости основания под углом α.

609. Определить углы, составляемые с основанием боковым ребром и боковой гранью правильной пятиугольной пирамиды, у которой боковые грани — равносторонние треугольники.

610. По объёму V правильной n-угольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, определить угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

611. Основание четырёхугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b, и углом α между диагоналями. Каждое из боковых рёбер образует с основанием угол β. Найти объём пирамиды.

612. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a, и углом между ними, равным α. Все боковые рёбра наклонены к основанию под углом β. Определить объём пирамиды.

613. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит прямоугольник, вписанный в круг радиуса R, причём меньшая сторона этого прямоугольника стягивает дугу окружности, содержащую $(2\alpha)^\circ$. Найти объём этого параллелепипеда, зная его боковую поверхность S.

614. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при основании равен α. Определить объём призмы, если её боковая поверхность равна сумме площадей её оснований.

615. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна m. Двугранный угол при основании равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

616. Через гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость P под углом α к плоскости треугольника. Определить периметр и площадь фигуры, которая получится, если спроектировать треугольник на плоскость P. Гипотенуза треугольника равна c.

617. В правильной n-угольной пирамиде площадь основания равна Q, а высота составляет с каждой из боковых граней угол φ. Определить боковую и полную поверхность пирамиды.

618. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом φ. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

619. Полная поверхность правильной треугольной пирамиды равна S. Зная, что угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α, найти сторону основания пирамиды.

620. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

621. Определить угол наклона боковой грани правильной пятиугольной пирамиды к плоскости основания, если площадь основания пирамиды равна S, а боковой поверхности равна σ.

622. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол β. Полученное сечение имеет площадь, равную Q. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

623. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Расстояние от центра круга, вписанного в основание пирамиды, до середины высоты боковой грани равно d. Определить полную поверхность пирамиды.

624. Основанием пирамиды служит многоугольник, описанный около круга радиуса r; периметр многоугольника равен $2p$, боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объём пирамиды.

625. Боковые рёбра правильной усечённой треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Сторона нижнего основания равна a, а верхнего — b $(a > b)$. Найти объём усечённой пирамиды.

626. Основаниями правильной усечённой пирамиды служат квадраты со сторонами a и b $(a > b)$. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом α. Определить объём усечённой пирамиды и величину двугранных углов при сторонах оснований.

627. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом α. Все боковые рёбра наклонены к основанию под углом β. Найти объём пирамиды и плоские углы при вершине её.

628. В основании наклонной призмы лежит прямоугольный треугольник ABC, сумма катетов которого равна m и угол при вершине A равен α. Боковая грань призмы, проходящая через катет AC, наклонена к основанию под углом β. Через гипотенузу AB и через вершину C_1 противоположного трёхгранного угла проведена плоскость. Определить объём отсечённой треугольной пирамиды, если известно, что боковые рёбра её равны между собой.

629. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под равными углами $\varphi = 90° - \alpha$. Площадь сечения, проведённого через высоту пирамиды и через вершину равнобедренного треугольника, лежащего в основании, равна Q. Определить объём пирамиды.

630. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Из боковых граней две перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β. Высота пирамиды равна H. Определить объём пирамиды.

631. Пирамида имеет в основании квадрат. Из двух противолежащих друг другу рёбер одно перпендикулярно к плоскости основания, другое наклонено к ней под углом β и имеет длину l. Определить длины остальных боковых рёбер и углы наклона их к плоскости основания пирамиды.

632. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Одно из боковых рёбер перпендикулярно к основанию, а остальные два наклонены к плоскости основания под равными углами β. Найти площадь наибольшей боковой грани пирамиды и угол наклона её к плоскости основания.

633. Пирамида имеет в основании равнобедренный треугольник; боковые стороны этого основания равны a и образуют угол в $120°$. Боковое ребро пирамиды, проходящее через вершину тупого угла, перпендикулярно к плоскости основания, а остальные два наклонены к ней под углом α. Определить площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через наибольшую сторону основания пирамиды и делит пополам ребро, перпендикулярное к основанию.

634. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной к основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объём отсечённой пирамиды, если даны сторона a основания первоначальной пирамиды и двугранный угол α при основании.

635. Через вершину правильной четырёхугольной пирамиды под углом φ к основанию пирамиды проведена плоскость параллельно стороне основания. Сторона основания пирамиды равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти площадь сечения пирамиды.

636. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определить площадь сечения и объёмы частей данной пирамиды, на которые она разделена сечением, зная сторону a её основания, и угол α, образованный сечением с основанием.

637. Тетраэдр[1]), ребро которого равно a, пересечен плоскостью, содержащей одно из ребер тетраэдра и делящей противоположное ребро в отношении $2:1$. Определить площадь сечения и углы этого сечения.

638. Определить объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если сторона бо́льшего основания равна a, сторона меньшего основания равна b, а острый угол боковой грани равен α.

639. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с боковой гранью угол α, а сторона основания равна b.

640. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

641. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, у которого сумма катета и гипотенузы равна m и угол между ними равен α. Через другой катет и вершину противоположного трехгранного угла призмы проведена плоскость, образующая с основанием угол β. Определить объемы частей, на которые призма делится плоскостью сечения.

642. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Каждый двугранный угол при основании равен $\varphi = 90° - \alpha$. Боковая поверхность пирамиды равна S. Определить объем пирамиды и полную поверхность ее.

643. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании ($\alpha > 45°$). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. В этой пирамиде проведена плоскость через ее высоту и вершину одного из углов α. Найти площадь сечения.

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 83.

644. В основании прямой призмы лежит четырёхугольник, в котором два противолежащих угла прямые. Диагональ основания, соединяющая вершины непрямых углов, имеет длину l и делит один из этих углов на части α и β. Площадь сечения, проведённого через другую диагональ основания перпендикулярно к нему, равна S. Найти объём призмы.

645. Основанием пирамиды служит квадрат. Две противоположные грани — равнобедренные треугольники, одна из них образует с основанием внутренний угол β, а другая — внешний острый угол α. Высота пирамиды равна H. Найти объём пирамиды и углы, образованные двумя другими боковыми гранями с плоскостью основания.

646. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Одна из боковых граней наклонена к основанию под углом $\beta = 90° - \alpha$, а противоположная ей грань перпендикулярна к основанию и имеет вид прямоугольного треугольника с прямым углом при вершине пирамиды и острым углом, равным α. Сумма высот этих двух граней равна m. Определить объём пирамиды и сумму площадей двух других боковых граней.

647. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Одна из боковых граней имеет вид равнобедренного треугольника и перпендикулярна к основанию; в другой грани, противоположной первой, боковые рёбра, равные b, образуют между собой угол 2α и наклонены к первой грани под углом α. Определить объём пирамиды и угол между указанными двумя гранями.

648. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания, равной a, углы между рёбрами при её вершине равны между собой и каждый равен α ($\alpha \leqslant 90°$). Определить углы между боковыми гранями пирамиды и площадь сечения, проведённого через сторону основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру.

649. Определить объём правильного восьмигранника (октаэдра) с ребром a и двугранные углы при его рёбрах.

650. Двугранный угол при боковом ребре правильной шестиугольной пирамиды равен φ. Определить плоский угол при вершине пирамиды.

651. Пирамида имеет в основании правильный шестиугольник $ABCDEF$. Боковое ребро MA перпендикулярно к плоскости основания, а противоположное ему ребро MD наклонено к плоскости основания под углом α. Определить углы наклона боковых граней к плоскости основания.

652. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник ABC, где $AB = AC$. Высота пирамиды SO проходит через середину высоты AD основания. Через сторону BC проведена плоскость перпендикулярно к боковому ребру AS, образующая с основанием угол α. Определить объем пирамиды, отсеченной от данной и имеющей с ней общую вершину S, если объем другой отсеченной части ее равен V.

653. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Сечение, делящее угол между боковыми гранями пополам, есть прямоугольный треугольник. Определить объем пирамиды и угол между боковой гранью ее и плоскостью основания.

654. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно к противолежащему боковому ребру. Определить полную поверхность пирамиды, если указанная плоскость делит боковое ребро в отношении $m : n$ и сторона основания равна q.

655. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с двумя смежными боковыми гранями равные углы α. Определить объем параллелепипеда и угол, который образует с плоскостью основания плоскость, проведенная через концы трех ребер, выходящих из одной вершины.

656. В прямоугольном параллелепипеде точка пересечения диагоналей нижнего основания соединена с серединой одного из боковых ребер прямой, длина которой равна m. Она образует с основанием угол α и с одной из боковых граней угол $\beta = 2\alpha$. Приняв другую смежную боковую грань за основание параллелепипеда, найти его боковую поверхность и объем. (Доказать, что $\alpha < 30°$.)

657. В основании прямой призмы лежит трапеция, вписанная в полукруг радиуса R так, что бо́льшее основание её совпадает с диаметром, а меньшее стягивает дугу, равную 2α. Определить объём призмы, если диагональ грани, проходящей через боковую сторону основания, наклонена к основанию под углом α.

658. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с боковой гранью угол $\beta = 90° - \alpha$. Плоскость, проведённая через эту диагональ и боковое ребро, пересекающееся с ней, образует с той же боковой гранью угол α (доказать, что $\alpha > 45°$). Определить объём параллелепипеда.

659. В правильной треугольной призме две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных им сторон нижнего основания. Угол между полученными линиями, обращённый отверстием к плоскости основания, равен α. Сторона основания равна b. Определить объём призмы.

660. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и другой боковой гранью равен α. Определить боковую поверхность призмы, зная, что ребро основания равно a.

661. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ и катет $AC = b$. Диагональ боковой грани призмы, проходящей через гипотенузу AB, образует с боковой гранью, проходящей через катет AC, угол β. Найти объём призмы.

662. Полная поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна S, а плоский угол боковой грани при вершине равен α. Найти высоту пирамиды.

663. В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а сторона основания a. Определить объём.

664. От правильной четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью S. Найти полную поверхность призмы, если угол при вершине треугольника, получившегося в сечении, равен α.

665. Боковые рёбра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Из трёх плоских углов, образованных при вершине пирамиды этими рёбрами, два равны α, а третий равен β. Найти объём пирамиды.

666. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, являющийся проекцией боковой грани, проходящей через катет. Угол, лежащий против этого катета в основании пирамиды, равен α, а лежащий в боковой грани равен β. Площадь этой боковой грани больше площади основания на S. Определить разность между площадями двух других граней и углы, образованные боковыми гранями с плоскостью основания.

667. В треугольной пирамиде две боковые грани суть равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны b и образуют между собой угол α. Определить объём пирамиды.

668. В пирамиде с прямоугольным основанием каждое из боковых рёбер равно l, один из плоских углов при вершине равен α, другой равен β. Определить площадь сечения, проходящего через биссектрисы углов, равных β.

669. В параллелепипеде длины трёх рёбер, выходящих из общей вершины, равны соответственно a, b и c. Рёбра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объём параллелепипеда, боковую поверхность его и угол между ребром c и плоскостью основания. (При каких значениях угла α задача возможна?)

670. В параллелепипеде все его грани — равные ромбы со сторонами a и острыми углами α. Определить объём этого параллелепипеда.

671. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α. Ребро AA_1 равно b и образует с рёбрами AB и AD угол φ. Определить объём параллелепипеда.

672. В прямоугольном параллелепипеде проведена плоскость через диагональ основания и диагональ большей боковой грани, выходящих из одной вершины. Угол между этими диагоналями равен β. Определить боковую поверхность параллелепипеда, площадь сечения и угол наклона сечения к плоскости основания, если известно, что радиус окружности, описанной около основания параллелепипеда, равен R и меньший угол между диагоналями основания равен 2α.

673. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC. Радиус окружности, описанной около него, равен R, катет AC стягивает дугу, равную 2β. Через диагональ боковой грани, проходящей через другой катет BC, проведена плоскость перпендикулярно к этой грани, образующая с плоскостью основания угол β. Определить боковую поверхность призмы и объём отсечённой четырёхугольной пирамиды.

674. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны между собой, большее основание равно a и тупой угол трапеции равен α. Все боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β. Определить объём пирамиды.

675. В основании пирамиды лежит трапеция, у которой диагональ перпендикулярна к боковой стороне и образует с основанием угол α. Все боковые рёбра равны между собой. Боковая грань, проходящая через большее основание трапеции, имеет угол при вершине пирамиды $\varphi = 2\alpha$ и площадь, равную S. Определить объём пирамиды и углы, под которыми наклонены боковые грани к плоскости основания.

676. В основании пирамиды лежит правильный треугольник, сторона которого равна a. Высота, опущенная из вершины пирамиды, проходит через одну из вершин основания. Боковая грань, проходящая через сторону основания, противолежащую этой вершине, наклонена к плоскости основания под углом φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды, если за основание её принять одну из равных боковых граней.

677. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a, и углом при основании, равным α. Через основание треугольника, являющегося верхней гранью, и противоположную вершину нижнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Определить боковую поверхность призмы и объем отсеченной четырехугольной пирамиды.

678. В основании пирамиды — квадрат. Две боковые грани ее перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом α. Радиус круга, описанного около боковой грани, перпендикулярной к основанию, равен R. Определить полную поверхность пирамиды.

679. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом α. Через вершину прямого угла нижнего основания проведена плоскость, параллельная гипотенузе, под углом $\beta = 90° - \alpha$ к противолежащей боковой грани и пересекающая ее. Определить объем части призмы между ее основанием и сечением и боковую поверхность призмы, если известно, что боковая грань, проходящая через катет a, равновелика сечению призмы. Определить, при каком значении угла α плоскость сечения пересекает боковую грань, проходящую через гипотенузу основания.

680. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Одно боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания, а две боковые грани наклонены к ней под углами α и β. Определить боковую поверхность пирамиды, если высота ее равна H.

681. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, у которого один острый угол равен α и радиус вписанного круга равен r. Каждая из боковых граней образует с основанием угол α. Определить объем, боковую и полную поверхность пирамиды.

682. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$ и $\angle ABC = \alpha$). Вершина B_1 верхнего основания призмы проектируется в центр окружности радиуса r, вписанной в нижнее основание. Через

сторону AC основания и вершину B_1 проведена плоскость, наклонённая к плоскости основания под углом α. Найти полную поверхность отсечённой треугольной пирамиды $ABCB_1$ и объём призмы.

683. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, а высота её проходит через точку пересечения гипотенузы с биссектрисой прямого угла основания. Боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла, наклонено к плоскости основания под углом α. Определить объём пирамиды и углы наклона боковых граней к плоскости основания, если биссектриса прямого угла основания равна m и образует с гипотенузой угол $45°+\alpha$.

684. В основании пирамиды ромб со стороной a. Две соседние грани составляют с плоскостью основания угол α, третья боковая грань составляет с плоскостью основания угол β (доказать, что и четвёртая боковая грань наклонена к основанию под тем же углом). Высота пирамиды H. Найти объём пирамиды и полную поверхность её.

685. В основании четырёхугольной пирамиды лежит ромб, сторона которого равна a и острый угол равен α. Плоскости, проходящие через вершину пирамиды и диагонали основания, наклонены к плоскости основания под углами φ и ψ. Определить объём пирамиды, если её высота пересекает сторону основания.

686. В основании наклонной призмы лежит прямоугольный треугольник ABC с катетом $BC=a$. Вершина B_1 верхнего основания проектируется на середину катета BC. Двугранный угол, образованный боковыми гранями, проходящими через катет BC и гипотенузу AB, равен α. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом β. Определить боковую поверхность призмы.

687. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$ и $\angle BAC=2\alpha$). Вершина A_1 верхнего основания проектируется в центр окружности радиуса R, описанной около нижнего основания. Боковое ребро AA_1 образует со стороной основания AB угол, равный 2α. Определить объём и боковую поверхность призмы.

688. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен β.

689. В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде даны: диагональ d, двугранный угол α при нижнем основании и высота H. Найти объём усечённой пирамиды.

690. Боковое ребро правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равно l, оно наклонено к плоскости основания под углом β. Диагональ пирамиды перпендикулярна к боковому ребру её. Определить объём пирамиды.

691. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна H, боковое ребро и диагональ пирамиды наклонены к плоскости её основания под углами α и β. Найти её боковую поверхность.

692. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны a и $a\sqrt{3}$, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом γ. Определить объём и полную поверхность пирамиды.

693. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб так, что его четыре вершины находятся на боковых рёбрах пирамиды, а остальные четыре — в плоскости её основания. Определить ребро куба, если высота пирамиды равна H, а боковое ребро равно l.

694. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб так, что вершины его лежат на апофемах пирамиды. Найти отношение объёма пирамиды к объёму куба, зная, что угол между высотой пирамиды и её боковой гранью равен α.

695. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Вершина пирамиды удалена от плоскости её основания на расстояние, равное 24, и проектируется на эту плоскость в точку, лежащую внутри основания. Найти ребро куба, четыре вершины которого лежат

в плоскости основания данной пирамиды, а рёбра, соединяющие эти вершины, параллельны соответствующим катетам треугольника, лежащего в основании пирамиды. Четыре другие вершины куба лежат на боковых гранях данной пирамиды.

696. В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Через его ребро проведена плоскость, составляющая с основанием угол β. Сторона основания равна a. Определить площадь сечения.

697. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен α. Через две противоположные стороны основания пирамиды проведены две плоскости, пересекающиеся взаимно под прямым углом. Определить длину линии их пересечения, заключённую внутри пирамиды, если известно, что она пересекает *ось пирамиды*.

698. В правильной четырёхугольной пирамиде через вершину основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру. Определить площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ ($\varphi > 45°$; доказать это).

699. Правильную четырёхугольную призму требуется пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб с острым углом α. Найти угол наклона секущей плоскости к основанию.

700. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом α. Под каким углом к основанию нужно пересечь этот параллелепипед плоскостью, чтобы в сечении получился квадрат с вершинами на боковых рёбрах.

701. Прямой параллелепипед, имеющий в основании ромб со стороной a и острым углом α, пересечён плоскостью, проходящей через вершину угла α и дающей в сечении ромб с острым углом $\frac{\alpha}{2}$. Определить площадь этого сечения.

702. Ребро тетраэдра равно b. Через середину одного из рёбер проведена плоскость параллельно двум непересекающимся рёбрам. Определить площадь полученного сечения.

703. Пирамида имеет в основании прямоугольный треугольник с катетом a. Одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, а другие два наклонены к ней под одним и тем же углом α. Плоскость, перпендикулярная к основанию, даёт в сечении с пирамидой квадрат. Определить площадь этого квадрата.

704. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде стороны верхнего и нижнего оснований равны соответственно a и $3a$ и боковые грани наклонены к плоскости нижнего основания под углом α. Через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположной боковой грани. Определить объём четырёхугольной призмы, отсечённой от данной усечённой пирамиды, и полную поверхность остальной части её.

705. Из точки, взятой на ребре правильной треугольной призмы со стороной основания a, проведены две плоскости. Одна проходит через сторону нижнего основания призмы под углом α к последнему, а другая — через параллельную ей сторону верхнего основания под углом β к нему. Определить объём призмы и сумму площадей полученных сечений.

706. В правильной четырёхугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклонённая к плоскости основания под углом α. Определить площадь полученного сечения и острый угол его, если сторона основания призмы равна b.

707. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция с острым углом α, описанная около круга радиуса r. Через боковую сторону нижнего основания и противоположную вершину острого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность призмы и площадь сечения.

708. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом α при основании BC. Боковая поверхность призмы равна S. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через диагональ боковой грани BCC_1B_1 параллельно высоте AD основания призмы и образующей с плоскостью основания угол β.

709. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с углом β при вершине B ($\beta < 45°$). Разность между площадями её боковых граней, проходящих через катеты BC и AC, равна S. Найти площадь сечения призмы плоскостью, образующей с плоскостью основания угол φ и проходящей через три точки: вершину B_1 угла β верхнего основания, середину бокового ребра AA_1 и точку D, расположенную на плоскости основания симметрично с вершиной B относительно катета AC.

710. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

711. Даны три плоских угла трёхгранного угла $SABC$: $\angle BSC = \alpha$; $\angle CSA = \beta$; $\angle ASB = \gamma$. Найти двугранные углы этого трёхгранного угла.

712. Один из двугранных углов трёхгранного угла равен A; прилежащие к данному двугранному углу плоские углы соответственно равны α и β. Найти третий плоский угол.

713. В трёхгранном угле даны три плоских угла в 45°, 60° и 45°. Определить двугранный угол, заключённый между теми двумя гранями, которые содержат плоские углы по 45°.

714. На ребре двугранного угла дан отрезок AB. В одной из граней дана точка M, в которой прямая, проведённая из точки A под углом α к AB, пересекает прямую, проведённую из B перпендикулярно к AB. Определить величину двугранного угла, если прямая AM наклонена ко второй грани двугранного угла под углом β.

715. Даны две скрещивающиеся прямые, наклонённые друг к другу под углом φ и имеющие общий пересекающий их перпендикуляр $PQ = h$. На этих прямых даны две точки A и B, из которых отрезок PQ виден под углами α и β. Определить длину отрезка AB.

716. На двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых, кратчайшее расстояние между которыми $PQ = h$, даны две точки A и B, из которых отрезок PQ виден под углами α и β. Определить угол наклона отрезка AB к отрезку PQ.

717. Секущая плоскость делит боковые рёбра треугольной пирамиды в отношениях (считая от вершины) $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_3}{n_3}$. В каком отношении эта плоскость разделит объём пирамиды?

718. Из середины высоты правильной четырёхугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный h, и перпендикуляр на боковую грань, равный b. Найти объём пирамиды.

ГЛАВА 10

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

719. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол в 60°. Определить объём конуса.

720. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания — c. Определить объём.

721. Боковая поверхность цилиндра развёртывается в квадрат со стороной a. Найти объём цилиндра.

722. Боковая поверхность цилиндра, будучи развёрнута, представляет собою прямоугольник, в котором диагональ равна d и составляет угол α с основанием. Определить объём цилиндра.

723. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна m. Найти объём и полную поверхность конуса.

724. Объём конуса V. Высота его разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основанию. Найти объём средней части.

725. Определить объём конуса, если в его основании хорда, равная a, стягивает дугу α, а высота конуса составляет с образующей угол β.

726. На одном и том же основании построены два конуса (один внутри другого); угол между высотой и образующей меньшего конуса равен α, а угол между высотой и образующей бóльшего конуса равен β. Разность высот конусов равна h. Найти объём, заключённый между боковыми поверхностями этих конусов.

727. Боковая поверхность конуса равна S, а полная поверхность — P. Определить угол между высотой и образующей.

728. Боковая поверхность конуса, будучи развёрнута на плоскость, представляет круговой сектор с углом α и хордой a. Определить объём конуса.

729. Через вершину конуса под углом φ к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α; расстояние плоскости от центра основания равно a. Найти объём конуса.

730. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и сторону квадрата, даёт в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого α. Определить объём и полную поверхность конуса.

731. Образующая усечённого конуса l составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпендикулярна к прямой, соединяющей верхний конец её с нижним концом противоположной образующей. Найти боковую поверхность усечённого конуса.

732. Дан конус объёма V, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. На какой высоте надо провести плоскость, перпендикулярную к оси конуса, чтобы сечение конуса разделило пополам его боковую поверхность? Тот же вопрос для полной поверхности.

733. Определить объём и полную поверхность шарового сектора, вырезанного из шара радиуса R и имеющего в осевом сечении угол α.

734. Шаровой сегмент шара радиуса R имеет полную поверхность S. Найти его высоту.

735. Площадь треугольника ABC равна S, сторона $AC = b$ и $\angle CAB = \alpha$. Найти объём тела, полученного при вращении треугольника ABC около стороны AB.

736. В треугольнике даны сторона a, угол B и угол C. Определить объём тела, полученного от вращения треугольника около данной стороны.

737. Ромб с бо́льшей диагональю d и острым углом γ вращается вокруг оси, проходящей вне его через вершину ромба и перпендикулярной к бо́льшей диагонали его. Определить объём тела вращения.

738. В треугольнике даны стороны b и c и угол между ними α. Этот треугольник вращается около оси, которая проходит вне его через вершину угла α и равно наклонена к сторонам b и c. Определить объём тела вращения.

739. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне. Боковая сторона равна b и составляет с бо́льшим основанием угол α. Определить поверхность тела, образованного вращением трапеции вокруг большего основания.

740. Через вершину конуса проведены две плоскости. Одна из них наклонена к плоскости основания конуса под углом α и пересекает это основание по хорде, длина которой равна a, а другая наклонена к плоскости основания под углом β и пересекает основание по хорде, длина которой равна b. Определить объём конуса.

741. В конус вписан шар. Найти объем шара, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

742. Прямая линия — касательная к боковой поверхности конуса — составляет с образующей, проходящей через точку касания, угол θ. Какой угол φ составляет эта прямая с плоскостью основания P конуса, если образующие его наклонены к плоскости P под углом α?

743. Тупоугольный треугольник, острые углы которого α и β и меньшая высота равна h, вращается около стороны, противолежащей углу β. Найти поверхность тела вращения.

744. В конус, поставленный основанием вверх и представляющий в осевом сечении равносторонний треугольник, налита вода и положен шар радиуса r. Тогда оказалось, что уровень воды касается шара. Определить высоту воды в конусе после того, как шар будет из него вынут.

745. В конус, радиус основания которого равен R и образующие наклонены к основанию под углом $\frac{\alpha}{2}$, вписана прямая треугольная призма так, что ее нижнее основание лежит на основании конуса, а вершины верхнего — на боковой поверхности конуса. Определить боковую поверхность призмы, если в основании призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом α, а высота призмы равна радиусу сечения конуса плоскостью, проходящей через верхнее основание призмы.

746. В треугольную пирамиду, в основании которой — правильный треугольник со стороной a, вписан цилиндр так, что нижнее его основание находится на основании пирамиды, а верхнее касается всех боковых граней. Определить объем цилиндра и объем пирамиды, отсеченной плоскостью, проходящей через верхнее основание цилиндра, если известно, что высота цилиндра равна $\frac{a}{2}$, одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, а боковая грань наклонена к основанию под углом α (определить, при каких значениях α задача возможна).

747. В шар радиуса R вписана прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α, а наибольшая её боковая грань есть квадрат. Найти объём призмы.

748. Основанием пирамиды служит прямоугольник с острым углом α между диагоналями, а боковые рёбра образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объём этой пирамиды, если радиус шара, описанного около неё, равен R.

749. Радиус основания конуса равен R, а угол при вершине осевого сечения равен α. Найти объём правильной треугольной пирамиды, описанной вокруг конуса.

750. В усечённый конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α. Найти боковую поверхность усечённого конуса.

751. Около шара описан усечённый конус, у которого образующие наклонены к основанию под углом α. Определить полную поверхность этого усечённого конуса, если радиус шара равен r.

752. В усечённый конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найти объём конуса.

753. В шаре радиуса R из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить их длину.

754. В шар радиуса R вписан усечённый конус. Основания усечённого конуса отсекают от шара два сегмента с дугами в осевом сечении, соответственно равными α и β. Найти боковую поверхность усечённого конуса.

755. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды наклонены к основанию под углом α. Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Апофема пирамиды равна m. Найти полную поверхность конуса, описанного около пирамиды.

756. Около правильной шестиугольной пирамиды описан конус. Найти его объём, если ребро пирамиды равно l и плоский угол между двумя соседними боковыми рёбрами равен α.

757. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Найти объём конуса, если ребро пирамиды равно l и плоский угол между двумя соседними боковыми рёбрами равен α.

758. В шар вписан конус, объём которого равен $\frac{1}{4}$ объёма шара. Найти объём шара, если высота конуса равна H.

759. В правильную треугольную призму вписан шар, касающийся трёх граней и обоих оснований призмы. Найти отношение поверхности шара к полной поверхности призмы.

760. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объём пирамиды.

761. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан полушар так, что его плоская грань параллельна основанию пирамиды, а шаровая поверхность касается его. Определить полную поверхность пирамиды, если боковые её грани образуют с основанием угол α и радиус шара равен r.

762. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан полушар так, что плоская грань его лежит на основании пирамиды, а шаровая поверхность касается боковых граней пирамиды. Найти отношение полной поверхности полушара к полной поверхности пирамиды и объём полушара, если боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α и разность между стороной основания и диаметром шара равна m.

763. В конус с радиусом основания R и углом α между высотой и образующей вписан шар, касающийся основания и боковой поверхности конуса. Определить объём части конуса, расположенной над шаром.

764. Полная поверхность прямого кругового конуса в n раз больше поверхности вписанного в него шара. Под каким углом образующие этого конуса наклонены к плоскости его основания?

765. В конус вписан шар. Отношение их объёмов равно n. Найти угол наклона образующей к основанию (вычислить при $n = 4$).

766. Определить угол между осью и образующей такого конуса, у которого полная поверхность в n раз больше площади осевого сечения.

767. В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, если полная поверхность конуса относится к боковой поверхности полусферы, как 18 : 5.

768. Определить угол между высотой и образующей конуса, если известно, что объём конуса в $1\frac{1}{3}$ раза больше объёма полушара, вписанного в конус так, что плоская грань полушара лежит в основании конуса, а полушаровая поверхность касается боковой поверхности конуса.

769. Определить угол между высотой и образующей конуса, боковая поверхность которого делится на две равновеликие части линией пересечения её со сферической поверхностью, имеющей центр в вершине конуса и радиусом высоту конуса.

770. Конус с высотой H и углом между образующей и высотой, равным α, надо рассечь сферической поверхностью с центром в вершине конуса так, чтобы объём конуса оказался разделённым пополам. Найти радиус этой сферы.

771. На высоте конуса, равной H, как на диаметре, описан шар. Определить объём части шара, лежащей вне конуса, если угол между образующей и высотой равен α.

772. Даны два шара O и O_1, касающиеся извне, и описанный около них конус. Вычислить боковую поверхность усечённого конуса, основаниями которого служат окружности прикосновения шаров к поверхности конуса, если радиусы шаров равны R и R_1.

773. На столе, касаясь друг друга, лежат четыре шара одинакового радиуса r. Сверху в ямку, образованную ими, положен пятый шар того же радиуса. Найти расстояние от верхней точки пятого шара до плоскости стола.

774. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырёх равных шаров, расположенных так, что каждый касается трёх других.

775. Грани правильной усечённой треугольной пирамиды касаются шара. Определить отношение поверхности шара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом α.

776. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса, как 3 : 2.

777. Радиус шара, вписанного в четырёхугольную правильную пирамиду, равен r. Двугранный угол, образованный двумя соседними боковыми гранями этой пирамиды, равен α. Определить объём пирамиды, имеющей вершину в центре шара, а вершины основания — в четырёх точках касания шара с боковыми гранями данной пирамиды.

778. В конус вписан шар радиуса r. Найти объём конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии d.

779. Ребро куба равно a; AB — его диагональ. Найти радиус сферы, касающейся трёх граней, сходящихся в вершине A и касающейся трёх рёбер, выходящих из вершины B. Найти также часть поверхности этой сферы, которая лежит вне куба.

780. В тетраэдр[1]), у которого ребро равно a, вписан шар так, что он касается всех рёбер тетраэдра. Определить радиус этого шара и объём части шара, расположенной вне тетраэдра.

ГЛАВА 11

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Доказать тождества:

781. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha.$

782. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$

783. $2(\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$

784. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$

785. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha.$

786. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$

787. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1.$

788. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$

789. $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$

790. $\frac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right).$

791. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 83.

792. $\dfrac{\sin x + \cos(2y - x)}{\cos x - \sin(2y - x)} = \dfrac{1 + \sin 2y}{\cos 2y}$.

793. $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)\sec^2\alpha\sec^2\beta$.

794. $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(1 + \sin\alpha\right)}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

795. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$.

796. $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha$.

797. $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \mathrm{tg}\,3\alpha$.

798. $\sin(a - b) + \sin(a - c) + \sin(b - c) =$

$$= 4\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}.$$

799. $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$.

800. $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

801. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ\cos(15^\circ + 2\alpha) =$

$$= \sin 2\alpha.$$

802. Показать, что

$$\frac{1 - 2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{ctg}\,\varphi.$$

803. Показать, что

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}.$$

804. Доказать тождество

$$\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha + \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha + \varphi) = \sin^2\alpha.$$

805. Упростить выражение

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta).$$

806. Упростить выражение

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

807. Доказать, что

$$\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C=1,$$

если $A+B+C=\pi$.

808. Доказать, что

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}.$$

809. Доказать, что

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

Привести к виду, удобному для логарифмирования:

810. $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$.

811. $1-\sqrt{2}\cos\alpha+\cos 2\alpha$.

812. $1-\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$.

813. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

814. $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

815. $1-\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha$.

816. $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$.

817. $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

818. $\frac{2\sin\beta-\sin 2\beta}{2\sin\beta+\sin 2\beta}$.

819*. $\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

820. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha$.

821. $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

822. $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$.

823. $\frac{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$.

824. $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$.

825. $\operatorname{tg}x-1+\sin x(1-\operatorname{tg}x)+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

826. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

827. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$.

828. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z-\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}$.

829. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

ГЛАВА 12
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решить уравнения:

830. $1-\sin 5x=\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)^2$.

831. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

832. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+60^\circ)=1+\cos 2x$.

833. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

834. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1.$

835. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$

836. $\sin (x - 60°) = \cos (x + 30°).$

837. $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1.$

838. $\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3.$

839. $\cos 4x = -2 \cos^2 x.$

840. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$

841. $\sin 3x = \cos 2x.$

842. $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$

843. $3 \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1.$

844. $(1 + \cos 4x) \sin 4x = \cos^2 2x.$

845. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x.$

846. $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0.$

847. $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2 \sqrt{3} \sin x \cos x = 1.$

848. $6 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2.$

849. $\sin^2 x + \frac{3}{2} \cos^2 x = \frac{5}{2} \sin x \cos x.$

850. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1.$

851. $\sin x + \cos x = 1.$

852. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x.$

853. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}.$

854. $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x.$

855. $\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x.$

856. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$

857. $2 \cos^2 x + 4 \cos x = 3 \sin^4 x.$

858. $5 \cos 2x = 4 \sin x.$

859. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$

860. $8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \sec x.$

861. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos x} = \sec^2 \frac{x}{2} - 1.$

862. $1 - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi + x}{2} = 0.$

863. $2\left[1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right] = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2}.$

864. $\sin x - \cos x - 4 \cos^2 x \sin x = 4 \sin^3 x.$

865. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2.$

866. $2 \operatorname{ctg}(x - \pi) - (\cos x + \sin x)(\operatorname{cosec} x - \sec x) = 4.$

867. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sec x - \cos x}{2 \sin x}.$

868. $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}} = 2 \sin \frac{x}{2}.$

869. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sec(-x) - \cos(2\pi - x).$

870. $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x \sec^2 x.$

871. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$

872. $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = 0{,}375.$

873. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x.$

874. $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right).$

875. $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

876. $1 - 3\cos x + \cos 2x = \frac{\operatorname{cosec}(\pi - x)}{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x}.$

877. $[\cos x - \sin(x - \pi)]^2 + 1 = \frac{2\sin^2 x}{\sec^2 x - 1}.$

878. $(\sin x + \cos x)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

879. $2 - \sin x \cos 2x - \sin 2x \cos x =$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\right]^2.$$

880. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$

881. $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$

882. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x.$

883. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4\cos^2 x} = \sin(x + 30^\circ)\sin(x - 30^\circ).$

884. $\frac{\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x)}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} + \frac{\operatorname{ctg} x}{(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2}.$

885. $\sec^2 x-\left(\cos x+\sin x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=$

$$=\frac{\sin(x-30^\circ)+\cos(60^\circ-x)}{\cos x}.$$

886. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}.$

887. $2\sqrt{2}\sin(45^\circ+x)=\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}.$

888. $1-\frac{2(\sin 2x-\cos 2x \operatorname{tg} x)}{\sqrt{3}\sec^2 x}=\cos^4 x-\sin^4 x.$

889. $\sin 3x=4\sin x\cos 2x.$

890. $\sec x+1=\sin(\pi-x)-\cos x \operatorname{tg}\frac{\pi+x}{2}.$

891. $\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}-2\sin(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)=0.$

892. $\operatorname{tg}(x-45^\circ)\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+45^\circ)=\frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}.$

893. $\frac{\operatorname{tg}(x+45^\circ)+\operatorname{tg}(x-45^\circ)}{2}=\operatorname{tg}(x-45^\circ)\operatorname{tg}(x+45^\circ)\operatorname{tg} x.$

894. $\operatorname{tg}(x+\alpha)+\operatorname{tg}(x-\alpha)=2\operatorname{ctg} x.$

895. $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x+\pi}{2}}.$

896. $\frac{\sin x}{\sin(30^\circ+x)+\sin(30^\circ-x)}=$

$$=1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+45^\circ\right)-\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right).$$

897. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

897а. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$.

Решить системы уравнений:

898. $\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$, $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$.

899. $x + y = \alpha$, $\sin x \sin y = m$.

900. $x + y = \alpha$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m$.

901. $x + y = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1$.

902. $2^{\sin x + \cos y} = 1$, $16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4$.

903. $\sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$.

904. $\sin x = 2\sin y$, $\cos x = \frac{1}{2}\cos y$.

ГЛАВА 13

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

905. Вычислить

$$2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}(-1) + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\arccos(-1).$$

906. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

907. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вычислить:

908. $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.

909. $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$.

910. $\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right]$.

911. $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

912. $\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

913. $\cos\left[3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

Доказать тождества:

914. $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

915. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

916. $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

917. $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

918. $2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{5}+\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{4}=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{32}{43}$.

919. $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{3}+\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{5}+\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{7}+\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Решить уравнения:

920. $4\,\mathrm{arc\,tg}\,(x^2-3x-3)-\pi=0$.

921. $6\,\mathrm{arc\,sin}\,(x^2-6x+8{,}5)=\pi$.

922. $\mathrm{arc\,tg}\,(x+2)-\mathrm{arc\,tg}\,(x+1)=\frac{\pi}{4}$.

923. $2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}-\mathrm{arc\,tg}\,x=\frac{\pi}{4}$.

924. $\mathrm{arc\,sin}\,\frac{2}{3\sqrt{x}}-\mathrm{arc\,sin}\sqrt{1-x}=\mathrm{arc\,sin}\,\frac{1}{3}$.

925. $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a}{b}-\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a-b}{a+b}=\mathrm{arc\,tg}\,x$.

926. $\mathrm{arc\,sin}\,3x=\mathrm{arc\,cos}\,4x$.

927. $2\,\mathrm{arc\,sin}\,x=\mathrm{arc\,sin}\,\frac{10x}{13}$.

928. Решить систему уравнений

$$x+y=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2a}{1-a^2},\quad \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y=a^2\ \ (|a|<1).$$

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ГЛАВА 1
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. 6,5625.

2. $29\frac{7}{12}$.

3. $365\frac{5}{8}$.

4. $3\frac{4}{15}$.

5. $18\frac{1}{3}$.

6. 50.

7. 23, 865.

8. $36\frac{25}{72}$.

9. 599,3

10. 84,075.

11. 2,5.

12. $2\frac{17}{21}$.

13. 0,0115.

14. $\frac{157}{280}$.

15. $38\frac{15}{64}$.

16. 6.

17. 700.

18. 100.

19. 10.

20. $7\frac{1}{2}$.

21. 5.

22. 3.

23. $2\frac{3}{80}$.

24. 5.

25. $1\frac{17}{84}$.

26. 10.

27. 1.

28. 1320.

29. 11.

30. 250.

31. 4.

32. 4000.

33. 66.

34. 2.

35. 9,5.

36. 0,09.

37. $\frac{35}{48}$.

38. 2.

39. $-\frac{1}{16}$.

40. $2\frac{1}{3}$.

41. $\frac{1}{8}$.

42. 1301.

43. $-20{,}384$.

44. 2,25.

45. $1\frac{1}{8}$.

ГЛАВА 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Предварительные замечания

При решении задач настоящей главы (начиная с задачи 62) необходимо учесть следующее.

1. Напомним, что корень $\sqrt[n]{a}$ называется арифметическим, если число a, из которого он извлекается, положительно (или равно нулю) и если, кроме того, сам корень берётся положительным.

Примеры. Выражение $\sqrt[3]{-27}$ не может представлять арифметического корня, так как подкоренное число отрицательно. Выражение $\sqrt[4]{16}$ представляет арифметический корень, если рассматривать только положительное значение этого корня (т. е. 2). Выражение $\sqrt[3]{27}$ представляет арифметический корень (т. е. 3), если рассматривать только действительное его значение $\left(\text{оно имеет ещё два мнимых значения } -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i \text{ и } -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$. Выражение $\sqrt{-16}$ не может представлять арифметического корня, так как под корнем число отрицательное.

2. Излагаемые в алгебре правила преобразования радикалов безоговорочно верны только для арифметических корней.

Например, равенство $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2}$ не верно при отрицательных значениях x. Так, при $x=-8$ левая часть равенства имеет только одно действительное значение $\sqrt[3]{-8}=-2$, а правая часть — два действительных значения $\sqrt[6]{64}=\pm 2$

(если рассматривать мнимые значения корней, то $\sqrt[3]{-8}$ имеет три значения, а $\sqrt[6]{64}$ — шесть).

Ввиду этого в настоящем разделе, где выполняются тождественные преобразования иррациональных выражений, мы принимаем, что все подкоренные выражения могут иметь только положительные (и нулевые) значения[1]). Тем самым на буквенные величины, входящие в упрощаемые выражения, накладываются некоторые добавочные условия. В ряде случаев (см., например, замечания к задачам 65—71) мы указываем эти условия. Иногда условия, которым должны удовлетворять буквенные величины, указываются в тексте задачи. Тогда при решении надо доказать, что при этих условиях все подкоренные выражения положительны.

3. Особо следует заметить, что равенство $\sqrt{x^2}=x$ (где $\sqrt{x^2}$ есть арифметический корень) верно только при $x \geqslant 0$. При отрицательном же значении x оно не верно; вместо него имеет место равенство $\sqrt{x^2}=-x$. Оба случая можно объединить равенством $\sqrt{x^2}=|x|$. Так, если $x=-3$, то $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=-(-3)$ (при этом $\sqrt{(-3)^2}$ является арифметическим корнем, так как подкоренное число $(-3)^2$ положительно и значение корня взято положительным). Можно также написать $\sqrt{(-3)^2}=|3|$. Это замечание необходимо сделать потому, что его нет в большинстве учебников (в том числе и в «Алгебре» А. П. Киселёва во всех многочисленных её изданиях). Важность замечания видна из следующих примеров.

Пример 1. Упростить выражение $\sqrt{m^2-2mn+n^2}$.
Решение

$$\sqrt{m^2-2mn+n^2}=\sqrt{(m-n)^2}=m-n$$

правильно только при $m \geqslant n$. При $m < n$ вместо него нужно написать

$$\sqrt{m^2-2mn+n^2}=-(m-n), \text{ т. е. } \sqrt{m^2-2mn+n^2}=n-m.$$

---

[1]) В одном случае мы вынуждены были отступить от принятого соглашения о положительности подкоренных выражений. Мы имеем в виду задачу 64, где выражение, стоящее под знаком кубического корня, ни при каких обстоятельствах не может быть положительным (см. на стр. 131 решение этой задачи).

Так, если $m=2$ и $n=3$, то $m-n=-1$, тогда как

$$\sqrt{m^2-2mn+n^2}=\sqrt{4-12+9}=\sqrt{1}=1.$$

Общая формула имеет вид

$$\sqrt{m^2-2mn+n^2}=|m-n| \text{ или } \sqrt{m^2-2mn+n^2}=|n-m|.$$

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{4+4p+p^2}-\sqrt{4-4p+p^2}}{\sqrt{4+4p+p^2}+\sqrt{4-4p+p^2}}.$$

Обозначив для краткости данное выражение через A, имеем (при $p\neq-2$):

$$A=\frac{|2+p|-|2-p|}{|2+p|+|2-p|}=\frac{1-\left|\frac{2-p}{2+p}\right|}{1+\left|\frac{2-p}{2+p}\right|}.$$

Если дробь $\frac{2-p}{2+p}$ положительна, то

$$A=\frac{1-\frac{2-p}{2+p}}{1+\frac{2-p}{2+p}}=\frac{p}{2};$$

если же она отрицательна, то

$$A=\frac{1+\frac{2-p}{2+p}}{1-\frac{2-p}{2+p}}=\frac{2}{p}.$$

Исследуем, при каких значениях p имеет место тот и другой случаи. Дробь $\frac{2-p}{2+p}$ положительна, когда $2-p$ и $2+p$ имеют одинаковые знаки. Потребуем сначала, чтобы величины $2-p$ и $2+p$ были обе положительны. Величина $2-p$ положительна, когда $p<2$; величина $2+p$ положительна, когда $p>-2$. Следовательно, обе величины $2-p$ и $2+p$ положительны при $-2<p<2$. Потребовав же, чтобы величины $2-p$ и $2+p$ были обе отрицательны, мы найдём, что это требование невыполнимо, так как $2-p$ отрицательна при $p>2$, а $2+p$ отрицательна при $p<-2$, а эти условия не совместны. Значит, дробь $\frac{2-p}{2+p}$ положительна только при $-2<p<2$. При значениях $p>2$, а также при значениях $p<-2$, дробь $\frac{2-p}{2+p}$ отрицательна.

Таким образом, $A=\frac{p}{2}$ при $|p|<2$ и $A=\frac{2}{p}$ при $|p|>2$. При $|p|=2$ годятся оба выражения.

Пример 3. Равенство $\sqrt{a^6}=a^3$ верно только при $a\geqslant 0$. При отрицательных значениях a вместо него имеет место равенство $\sqrt{a^6}=-a^3$. Так, при $a=-1$ имеем $\sqrt{(-1)^6}=-(-1)=+1$. Здесь $\sqrt{(-1)^6}$ есть арифметический корень, так как подкоренное число $(-1)^6=1$ положительно, и значение корня взято положительным.

Пример 4. Вынести множители за знак радикала в выражении $\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}$.

Данный корень может быть арифметическим только при $a\geqslant 3$, так как при $a<3$ множитель $(a-3)^3$, а вместе с ним и всё подкоренное выражение отрицательны. Равенство

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=(a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3}$$

верно только при $a\geqslant 5$. При $a<5$ вместо него нужно написать

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=-(a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3}.$$

Общая формула будет

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=|a-5|^3(a-3)\sqrt{a-3} \quad (\text{при } a\geqslant 3).$$

4. Вообще равенство $\sqrt[n]{x^n}=x$ (где левая часть обозначает арифметический корень) верно только для положительных значений x (и при $x=0$). Если n — чётное число, то при отрицательном значении x вместо $\sqrt[n]{x^n}=x$ имеем равенство $\sqrt[n]{x^n}=-x$. Если же n — нечётное число, то при отрицательном значении x вовсе нет арифметического корня.

46. Группируя последние три члена выражения в скобках, разложим его на множители

$$a^2-b^2-c^2+2bc=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c).$$

Заданное выражение примет вид

$$(a+c+b)(a+c-b)=(a+c)^2-b^2.$$

Отв. $(a+c)^2-b^2$; $139\frac{91}{225}$.

47. Выражение в скобках равно $\frac{1}{n-1}$. В числителе и знаменателе последней дроби удобно переменить все знаки на обратные, после чего числитель разложим на множители; дробь примет вид

$$\frac{(a+n)(n-1)(n^2+n+1)}{a^2-1}.$$

Отв. $\frac{n^2+n+1}{n}$.

48. Знаменатель второй дроби равен $(1+x)(x-2a)$. Выражение в скобках равно $1+x$. Заданное выражение равно

$$\frac{x}{a(x-2a)}-\frac{2}{x-2a}=\frac{1}{a}.$$

Отв. $\frac{1}{a}$.

49. *Отв.* $\frac{1}{a+2x}$.

50. Представим второе слагаемое в виде $\frac{a-130}{3a-1}$. Приведём дроби в скобках к общему знаменателю; получим $\frac{-3(2a^2+9a+10)}{a(3a-1)}$; приравняв нулю трёхчлен $2a^2+9a+10$ и найдя корни $a_1=-2$; $a_2=-\frac{5}{2}$, разложим его на множители

$$2a^2+9a+10=2(a+2)\left(a+\frac{5}{2}\right).$$

Теперь выражение в скобках примет вид

$$\frac{-3(a+2)(2a+5)}{a(3a-1)}.$$

Умножим его на

$$\frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^3}=\frac{4a(a+3)(3a-1)}{(2+a)(2-a)}.$$

Отв. $\frac{12(2a+5)(a+3)}{a-2}$.

51. Сокращаем каждую дробь, разложив числитель и знаменатель на множители.

Отв. $\frac{ab}{a+b}$.

52. Разложим на множители знаменатель второй дроби, и эту дробь сократим. Данное выражение примет вид

$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{1}{x+y}.$$

Отв. $\frac{1}{x+y}$.

53. Знаменатели дробей после упрощения принимают вид

$$\frac{4(x^2+x+1)}{3} \text{ и } \frac{4(x^2-x+1)}{3};$$

данное выражение преобразуется так:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right)=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}=$$
$$=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}.$$

Отв. $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

54. Разложим знаменатели первых четырёх дробей на множители и сократим первую дробь на $a-1$. Выражение в скобках примет вид

$$\frac{1}{a-1}+\frac{2(a-1)}{(a+2)(a-2)}-\frac{4(a+1)}{(a-1)(a+2)}+\frac{a}{(a-1)(a-2)}=$$
$$=\frac{2(a+3)}{(a-1)(a+2)(a-2)}.$$

Это нужно помножить на дробь $\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}$. Числитель последней дроби разло́жим на множители группировкой членов, знаменатель — как сумму кубов a^3+3^3; тогда эта дробь примет вид

$$\frac{36(a-1)(a+2)(a-2)}{(a+3)(a^2-3a+9)}.$$

Отв. $\frac{72}{a^2-3a+9}$.

55. Сумму дробей, составляющих делимое, обозначим через A, делитель — через B. Разложив на множители многочлены, входящие в A, найдём

$$A=\frac{3(x+2)}{2(x+1)(x^2+1)}+\frac{(x+2)(2x-5)}{2(x-1)(x^2+1)}.$$

В полученном выражении вынесем за скобку $\frac{x+2}{2(x^2+1)}$; имеем

$$A=\frac{x+2}{2(x^2+1)}\cdot\left(\frac{3}{x+1}+\frac{2x-5}{x-1}\right)=\frac{(x+2)(x^2-4)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)},$$

Далее находим

$$B=\frac{2(x^2-4)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)};$$

Разделив A на B, получим $\frac{x+2}{2}$.

Отв. $\frac{x+2}{2}$.

56. Делимое обозначим через A; делитель — через B. Приравняв нулю трёхчлен $x^2-xy-2y^2$, входящий в выражение A, решаем полученное уравнение относительно одного из неизвестных, например неизвестного x; найдя $x_1=-y$ и $x_2=2y$, получим разложение трёхчлена на множители $x^2-xy-2y^2=(x+y)(x-2y)$. Теперь имеем

$$A=\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(x-2y)}.$$

В вычитаемом напишем $2y-x$ вместо $x-2y$, одновременно изменив знаки в числителе этой дроби; затем дроби приведём к общему знаменателю, получим

$$A=\frac{2x^2+y-2}{(2y-x)(x+y)}.$$

В выражении B разлагаем на множители числитель [представив его в виде $(2x^2+y)^2-2^2$] и знаменатель (группируя x^2+xy и $y+x$). Тогда

$$B=\frac{(2x^2+y+2)(2x^2+y-2)}{(x+y)(x+1)}.$$

Разделив A на B, получим $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.

Отв. $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.

57. Разложив на множители многочлены, входящие в заданное выражение, получим

$$\frac{(a+2)(a-1)}{a^n(a-3)}\cdot\left[\frac{4(a+1)}{4(a+1)(a-1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right].$$

Отв. $\frac{a+2}{a^{n+1}}$.

58. Делимое обозначим через A, делитель — через B. Числитель дроби A есть

$$\frac{1}{2}[4a^2(b+c)^{2n}-1]=\frac{1}{2}[2a(b+c)^n+1][2a(b+c)^n-1],$$

а знаменатель

$$a(n^2-a^2-2a-1)=a[n^2-(a+1)^2]=$$
$$=a(\quad a+1)(n-a-1).$$

В дроби B числитель оставим без изменения, а знаменатель представим в виде $-ac(n-a-1)$.

Отв. $-\frac{[2a(b+c)^n+1]c}{2(n+a+1)}$.

59. Первый способ. Приведём все дроби к общему знаменателю:

$$\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}. \qquad (a)$$

Выполнив умножение двучленов, входящих в знаменатель, получим $a^2b-ab^2+b^2c-a^2c+ac^2-bc^2$, т. е. то же выражение, что и в числителе. После сокращения получаем $\frac{1}{abc}$.

Второй способ. Полагая в числителе дроби (а) $a=b$, убедимся в том, что числитель обращается при этом в нуль. Следовательно, по теореме Безу он делится на $(a-b)$. Выполнив деление, найдём частное

$$a(b-c)-c(b-c)=(b-c)(a-c).$$

Таким образом, числитель равен $(a-b)(b-c)(a-c)$.

Третий способ. Приведём к общему знаменателю только первые две дроби заданного выражения. Получим

$$\frac{b^2-bc-a^2+ac}{ab(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Группируя члены числителя (первый с третьим и второй с четвертым), мы придем к выражению

$$(b+a)(b-a)-c(b-a)=(a-b)(c-a-b).$$

Теперь сокращаем дробь на $(a-b)$ и прибавляем третью дробь заданного выражения.

Отв. $\frac{1}{abc}$.

60. Первый множитель равен $\frac{a+x+1}{a+x-1}$. Выражение в квадратных скобках равно $\frac{(a+x)^2-1}{2ax}=\frac{(a+x+1)(a+x-1)}{2ax}$. Перемножая заданные выражения, находим $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$. При подстановке $x=\frac{1}{a-1}$ числитель принимает вид $\frac{a^4}{(a-1)^2}$, а знаменатель становится равным $\frac{2a}{a-1}$.

Отв. $\frac{a^3}{2(a-1)}$.

61. Обозначим выражение в квадратных скобках через A, выражение в круглых скобках—через B. Имеем $A:B^{-1}=AB$. Выражение A освободим от степеней с отрицательными показателями. Получим

$$A=\frac{2b^2-3ab-2a^2}{a(a+2b)(2b-a)}=\frac{(b-2a)(2b+a)}{a(a+2b)(2b-a)}=\frac{b-2a}{a(2b-a)}.$$

Преобразовав B, получим

$$B=a^n\left(2b+3a-\frac{6a^2}{2a-b}\right)=a^n\cdot\frac{b(a-2b)}{2a-b}.$$

Наконец, находим $AB=a^{n-1}b$ (в одной из перемножаемых дробей переменим знаки членов в числителе и знаменателе).

Отв. $a^{n-1}b$.

62. Числитель преобразуется к виду a^2-b^2, знаменатель — к виду $a+b$.

Отв. $a-b$.

Замечание. Чтобы корни были арифметическими, числа a и b не должны быть отрицательными.

63. Первый радикал равен

$$\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^2}=(a-b)\sqrt[3]{(a+b)^2}.$$

Отв. $b(a^3-b^3)$.

Замечание. Предполагается, что $a \geqslant b$ (иначе первый корень не будет арифметическим).

64. В этом примере мы вынуждены отказаться от принятого нами (см. стр. 123) соглашения о том, что подкоренные выражения могут иметь только положительные значения. Дело в том, что величина, стоящая под знаком кубического радикала, всегда отрицательна. Действительно, выражения $\sqrt{6x}$ и $\sqrt{2x}$ (они имеют действительные значения лишь при $x \geqslant 0$) мы должны считать положительными (иначе выражение $2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}$ теряет однозначность). Но тогда разность $2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}=\sqrt{24x}-\sqrt{32x}$ отрицательна.

Итак, мы допускаем, чтобы под знаком кубического корня стояло отрицательное число. Тогда и сам кубический корень будет иметь отрицательное значение. Чтобы применять правила преобразования радикалов, нам надо выполнить такое преобразование:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}=-\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{6x}}.$$

Теперь радикал, стоящий в правой части, является арифметическим корнем. После приведения к одному показателю с первым из данных сомножителей получаем

$$-\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{6x}}=-\sqrt[6]{(4\sqrt{2x}-2\sqrt{6x})^2}=$$
$$=-\sqrt[6]{8x(7-4\sqrt{3})}.$$

Перемножая корни, получаем: $-\sqrt[6]{64x^2[49-(4\sqrt{3})^2]}=$ $=-2\sqrt[3]{x}$.

Отв. $-2\sqrt[3]{x}$.

Замечание. Если не обратить внимания на отрицательность выражения под знаком кубического корня, то получится неверный ответ $2\sqrt[3]{x}$[1]).

[1]) При подготовке первого издания настоящего сборника составители, исходя из вышеуказанного соглашения, не обратили внимания на его невыполнимость в данном примере и получили упомянутый неверный ответ.

65. Первый радикал равен $\sqrt[4]{(a+1)^4(a-1)}$. Вынося множитель $(a+1)$ за знак радикала, получаем $|a+1|\sqrt[4]{a-1}$. Заданное выражение равно

$$\frac{a}{2}|a+1|\sqrt[4]{a-1}\cdot\frac{\sqrt{a-1}}{(a+1)(a+2)}.$$

Приведём радикалы к одному показателю:

$$\frac{a}{2}\frac{|a+1|\sqrt[4]{(a-1)^3}}{(a+1)(a+2)}.$$

Если число $a+1$ положительно, то $|a+1|=a+1$, и по сокращении получаем $\frac{a}{2}\frac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{a+2}$.

Замечание. Число $a+1$ и будет положительным. Действительно, так как подкоренное выражение $(a+1)^4(a-1)$ предполагается положительным (или равным нулю), а множитель $(a+1)^4$ ни в каком случае не может быть отрицательным, то $a-1 \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant 1$, а при этом условии $a+1 \geqslant 2$.

Отв. $\frac{a}{2}\frac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{a+2}$.

66. Считая все корни арифметическими, приведём сомножители

$$\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}} \text{ и } \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}a^2}{9(1+a)^2}}$$

к одинаковому показателю 6. Первый и второй сомножители примут соответственно вид

$$\sqrt[6]{\frac{(1+a)^3(1+a)}{27a^3}},\ \sqrt[6]{\frac{3a^4}{81(1+a)^4}}.$$

Перемножив их, получим $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$.

Замечание. Первый сомножитель является арифметическим корнем только при условии $a>0$ (при $a<0$ подкоренное выражение отрицательно, при $a=0$ оно теряет смысл). Второй же сомножитель

является арифметическим корнем при любом значении a (кроме $a=-1$). Следовательно, величине a можно давать любые положительные значения.

Отв. $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$.

67. Введём ab под знак первого радикала. Данное выражение примет вид

$$\sqrt[n]{a-b}\,\frac{1}{\sqrt[n]{a-b}}=1.$$

Замечание. Чтобы данные радикалы были арифметическими корнями, должно быть $a \geqslant b$. Случай $a=b$ исключается, так как второй сомножитель теряет смысл.

Отв. 1.

68. Освобождаемся от иррациональности в знаменателях; получим

$$(\sqrt{6}-11)(\sqrt{6}+11)=-115.$$

Отв. -115.

69. Делимое равно $\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{b}$; делитель равен $\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$; частное равно $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$.

Замечание. Чтобы все данные корни были арифметическими, должны одновременно удовлетворяться три условия: $a \geqslant 0$, $a-b \geqslant 0$, $a+b \geqslant 0$ (их можно заменить двумя условиями: $a \geqslant 0$, $|b|<|a|$).

Отв. $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$.

70. Делимое равно $\frac{2b}{b^2-a}$, делитель $\frac{3b}{b^2-a}$. Частное $\frac{2}{3}$. Величина a может иметь любое положительное значение; b может иметь любое значение, кроме $\pm\sqrt{a}$.

Отв. $\frac{2}{3}$.

71. Числитель первой дроби приводится к виду

$$\frac{(\sqrt{1+a})^2+(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{|1+a|+|1-a|}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Если выражения $1+a$ и $1-a$ оба положительны, то (см. стр. 123, предварительные замечания, п. 3) числитель равен $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$. При том же условии знаменатель равен $\frac{|1+a|-|1-a|}{\sqrt{1-a^2}}=$ $=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$; дробь равна $\frac{1}{a}$, а данное выражение равно 0.

Замечание. Чтобы радикалы, входящие в данное выражение, были арифметическими корнями, нужно, чтобы величины $1+a$ и $1-a$ имели одинаковые знаки. Но невозможно, чтобы обе они были отрицательны, так как $1+a<0$ при условии $a<-1$, и $1-a<0$ при условии $a>1$, а эти условия несовместны. Для того же, чтобы величины $1+a$ и $1-a$ были обе положительны, нужно, чтобы выполнялось условие $-1<a<1$, т. е. чтобы было $|a|<1$ (значения $a=\pm 1$ исключаются, так как при каждом из них одно из данных выражений $\frac{1+a}{1-a}$, $\frac{1-a}{1+a}$ теряет смысл; значение $a=0$ тоже исключается, так как дробь $\frac{1}{a}$ теряет смысл).

Отв. 0.

72. Подставив $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ в выражение $\sqrt{x^2-1}$, получим

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left|a-\frac{1}{a}\right|.$$

Так как по условию $a\geqslant 1$, то $a-\frac{1}{a}\geqslant 0$. Поэтому

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

Точно так же найдём

$$\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right).$$

Подставляем найденные значения радикалов в данное выражение.

Отв. $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$.

73. Подставляя $x = \frac{2am}{b(1+m^2)}$ в выражения $\sqrt{a+bx}$ и $\sqrt{a-bx}$, находим

$$\sqrt{a+bx} = \sqrt{a + \frac{2am}{1+m^2}} = |1+m|\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}$$

и

$$\sqrt{a-bx} = |1-m|\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}.$$

Так как величина $1+m^2$ всегда положительна, то и величина a должна быть положительной (при $a<0$ оба корня мнимы, при $a=0$ они равны нулю, и данное выражение неопределённо). Так как, согласно дополнительному условию, $|m|<1$, то обе величины $1+m$ и $1-m$ положительны. Данное выражение принимает вид

$$\frac{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}} + (1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}}{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}} - (1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}} = \frac{1}{m}.$$

Отв. $\frac{1}{m}$ (при $a>0$).

74. Задача сходна с предыдущей. Имеем

$$(m-x)^{\frac{1}{2}} = \left(m - \frac{2mn}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{(n-1)^2}}{\sqrt{n^2+1}} = m^{\frac{1}{2}}\frac{|n-1|}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Так как по условию $n<1$, то

$$(m-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{m^{\frac{1}{2}}(1-n)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Аналогично

$$(m+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{m^{\frac{1}{2}}(1+n)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Отв. $\frac{1}{n}$.

75. Подставляем $x=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ в выражение $1-x^2$. Получаем

$$1-x^2=\frac{(1+k)^2-4k}{(1+k)^2}=\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2}.$$

Теперь находим

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1:\sqrt{1-x^2}=\frac{|1+k|}{|1-k|}.$$

Так как, согласно дополнительному условию, $k>1$, то величина $1+k$ положительна, а $1-k$ отрицательна. Поэтому $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+k}{k-1}$. Внутри первых квадратных скобок получается $\frac{k}{k-1}$, внутри вторых $\frac{1}{k-1}$. Данное выражение равно

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}+\sqrt{k-1}.$$

Отв. $\sqrt{k-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

76. Выражение в первых скобках равно $\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}$ (показатель степени -2 относится только к числителю третьего слагаемого!). После упрощений это выражение даёт $\frac{-(a-1)^2}{4a}$ или $\frac{-(1-a)^2}{4a}$.

Выражения

$$\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}=\frac{1}{a+1} \text{ и } (a+1)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(a+1)^3}$$

будут арифметическими корнями только при условии $a>-1$. При этом условии и радикал

$$\sqrt{(a^2-1)(a-1)}=\sqrt{(a-1)^2(a+1)}$$

будет арифметическим корнем (ибо множитель $(a-1)^2$ не может быть отрицательным). Равенство

$$\sqrt{(a-1)^2(a+1)}=(a-1)\sqrt{a+1}$$

верно только при $a \geqslant 1$. Если же $a < 1$, то

$$\sqrt{(a-1)^2(a+1)} = -(a-1)\sqrt{a+1}$$

(см. предварительные замечания, п. 3, стр. 123).

Данное выражение равно

$$-\frac{(a-1)^2}{4a}\cdot\left[\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{|a-1|}\right].$$

Замечание. При $a = \pm 1$ выражение теряет смысл.

Отв. $\frac{a-1}{a+1}$ при $a > 1$, $\frac{(a^2+1)(1-a)}{2a(a+1)}$ при $-1 < a < 1$, т. е. при $|a| < 1$.

77. Данное выражение можно представить в виде

$$2\left[\sqrt{x^2(x^2-a^2)} - a^2\sqrt{\frac{x^4}{x^2-a^2}}\right]\cdot\frac{\sqrt{x^4-a^4}}{2ax\sqrt{\left(\frac{x}{a}-2\frac{a}{x}\right)^2}}.$$

Предполагается, что $x^2-a^2>0$, т. е. $|x|>|a|$ (в противном случае корень $\sqrt{x^2-a^2}$ не будет арифметическим; случай $|x|=|a|$ исключается, так как второе подкоренное выражение теряет смысл).

Первый сомножитель преобразуется к виду

$$2|x|\frac{|x^2-a^2|-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = 2|x|\frac{x^2-2a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

(так как $x^2-a^2>0$, то $|x^2-a^2| = x^2-a^2$).

Выражение $\sqrt{\left(\frac{x}{a}-2\frac{a}{x}\right)^2}$ преобразуется к виду

$$\sqrt{\left(\frac{x^2-2a^2}{ax}\right)^2} = \frac{|x^2-2a^2|}{|a||x|}.$$

Здесь числитель можно записать в виде x^2-2a^2 только в случае, если $x^2-2a^2 \geqslant 0$, т. е. если $|x| \geqslant |a|\sqrt{2}$.

Теперь данное выражение запишется в виде

$$2|x|\frac{x^2-2a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4-a^4}\,|a|\cdot|x|}{2ax\,|x^2-2a^2|}.$$

Принимая во внимание, что $|x|\cdot|x|=|x|^2=x^2$ и производя сокращение, получим $\frac{x^2-2a^2}{a}\cdot\frac{|a|}{|x^2-2a^2|}x$ или, что то же, $\frac{x^2-2a^2}{a}\left|\frac{a}{x^2-2a^2}\right|x$.

Отв. При условии $|x|>|a|$ данное выражение равно $\pm x$; верхний знак берётся, когда $\frac{x^2-2a^2}{a}>0$, нижний — когда $\frac{x^2-2a^2}{a}<0$. Если $\frac{x^2-2a^2}{a}=0$, т. е. если $|x|=|a|\sqrt{2}$, данное выражение теряет смысл.

78. Освободимся от отрицательных показателей. Числитель примет вид

$$\frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=2ab,$$

а знаменатель будет

$$2ab\left(\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}\right).$$

Заметив, что $a+\sqrt{ab}=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ и $b+\sqrt{ab}=\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})$, представим знаменатель в виде

$$2ab\left(\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)=\frac{2ab}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{ab};$$

теперь заданное выражение равно

$$\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

Отв. $\sqrt{ab}$.

79. Выражение в первой скобке преобразуется к виду

$$\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a}+\sqrt{x})}.$$

Возведя его в степень -2, получим

$$\frac{(a+x)(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{4ax}.$$

Аналогично выражение во второй скобке преобразуется к виду

$$\frac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{4ax}.$$

При вычитании выносим за скобку $\frac{a+x}{4ax}$ (внутри скобок после упрощений получим $4\sqrt{ax}$).

Отв. $\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$.

80. Последнее слагаемое после упрощения принимает вид $\frac{a}{2\sqrt{x^2+a}}$. Приведя все дроби к общему знаменателю, в сумме получим

$$\frac{2(x^2+a)}{2\sqrt{x^2+a}}=\sqrt{x^2+a}.$$

Отв. $\sqrt{x^2+a}$.

81. *Отв.* $2(x+\sqrt{x^2-1})$.

82. Внутри квадратных скобок имеем $a^{-\frac{3}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}ba^{\frac{2}{3}}=$ $=a^{-\frac{4}{3}}b^2$. Заданное выражение равно $a^{-4}b^6$. Сюда подставляем

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Отв. 1.

83. Заданное выражение представим в виде $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$; сюда нужно подставить

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3} \text{ и } b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Находим $a+1=3-\sqrt{3}$, $\frac{1}{a+1}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ и т. д.

Отв. 1.

84. *Отв.* $\sqrt{x^2-4x}$.

85. *Отв.* n.

86. Чтобы все корни были арифметическими, должно быть $x-a^2>0$. Выражение в скобках приводится к виду $-\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}{a^2}$. Данное выражение равно

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(-\frac{a^2}{4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}\right)=-\frac{a^2}{4(x-a^2)}.$$

Отв. $-\frac{a^2}{4(x-a^2)}$.

87. Знаменатель второй дроби равен

$$x^{\frac{3}{2}}-1=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3-1=\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}+1\right).$$

Отв. $x-1$.

88. Делимое равно

$$2^{\frac{3}{2}}+27y^{\frac{3}{5}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(3y^{\frac{1}{5}}\right)^3=$$

$$=\left(2^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right)\left(2-3\cdot2^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{5}}+9y^{\frac{2}{5}}\right);$$

делитель равен $2^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}$.

Отв. $2-3\sqrt[10]{32y^2}+9\sqrt[5]{y^2}$.

89. Освободимся во втором члене от отрицательных показателей. Для этого можно числитель и знаменатель помножить на a^2. В числителе получим a^3-1, а в знаменателе

$$a^2\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=a^{\frac{3}{2}}\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)\right]=a^{\frac{3}{2}}(a-1).$$

По сокращении получим $\frac{a^2+a+1}{a^{3/2}}$. Аналогично третий член равен $\frac{a-1}{a^{3/2}}$.

90. Делимое и делитель преобразуются соответственно к виду

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \frac{(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)}.$$

Учитываем, что $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)=a^3-b^3$. В частном получаем a^2+ab+b^2. При $a=1,2$ и $b=\frac{3}{5}$ получаем 2,52.

Отв. a^2+ab+b^2; 2,52.

91. Раскрывая скобки и приведя подобные члены, представим делимое в виде

$$6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+9b=3b^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right);$$

делитель представим в виде $a^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)$. Частное есть $3\sqrt{\frac{b}{a}}$; при данных значениях $a=54$ и $b=6$ оно равно 1.

Отв. $3\sqrt{\frac{b}{a}}$; 1.

92. Умножая числитель и знаменатель данной дроби на

$$\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

получим в числителе

$$\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]=$$
$$=2(a+b)^{-\frac{1}{2}};$$

в знаменателе получим

$$\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]=$$
$$=-2(a-b)^{-\frac{1}{2}}$$

Отв. $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

93. В вычитаемом первый сомножитель приводится к виду $1-a^2$, а второй — к виду $(1-a^2)^{-\frac{3}{2}}$. Имеем

$$a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-(1-a^2)(1-a^2)^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}=(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2-1)=$$
$$=-(1-a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Отв. $-\sqrt{1-a^2}$.

94. Данное выражение равно

$$\frac{x^3-1}{\sqrt{x}\,(x+1)(x^2+1)}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=$$
$$=\frac{x^3-1}{\sqrt{x}\,(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}=\frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Отв. $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

95. Числитель третьего члена приводится к виду $R^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Знаменатель равен R^2. Данное выражение принимает вид

$$(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}+R^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(R^2-x^2)=2(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Отв. $2\sqrt{R^2-x^2}$.

96. Первое и второе слагаемые приведём соответственно к виду

$$\frac{p+q}{pq\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2},\quad \frac{2\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^3p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}.$$

Приведя эти слагаемые к общему знаменателю, получим

$$\frac{p+q+2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{pq\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Числитель этого выражения равен $\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Отв. $\frac{1}{pq}$.

97. Вводим дробные степени. В выражении $a+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ выносим за скобку $a^{\frac{2}{3}}$, а в выражении $x+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ выносим за скобку $x^{\frac{2}{3}}$. Тогда числитель первой дроби будет

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}-1=\frac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}},$$

так что первая дробь преобразуется к виду $\frac{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$. Выражение в квадратных скобках теперь принимает вид

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Отв. $\frac{a^2}{x^4}$.

98. Двучлен $a-\sqrt{ax}$ представим в виде $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})$. Числитель дроби будет

$$(\sqrt{a}+1)^2-\sqrt{a}=a+\sqrt{a}+1.$$

Знаменатель равен $3(a+\sqrt{a}+1)$.

Отв. 27.

99. Освободимся от степеней с отрицательными показателями; первое слагаемое (после сокращения на $2a-3$) примет вид $\frac{2a+3}{a^{1/3}}$; второе (после сокращения на $a-1$) даст $\frac{a-3}{a^{1/3}}$.

Отв. $9a$.

100. В первом сомножителе вынесем за скобку $a-b$. Величина $\frac{a+b}{a-b}$ не может быть отрицательной (иначе корни не арифметические). Данное выражение примет вид

$$(a-b)^2\left[\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2-1\right]=(a-b)^2\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

Отв. $2b(a-b)$.

101. Делимое и делитель представим соответственно в виде

$$\frac{a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\quad \frac{\sqrt[4]{b}\,(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{a-b}.$$

Частное можно сократить на $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$, если учесть, что

$$a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=$$
$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}).$$

Отв. $a\sqrt[4]{b}\,(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$.

102. Данное выражение представим в виде

$$\left[\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}}:\frac{a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right]^{\frac{2}{8}}.$$

Числитель делимого разложим на множители, как сумму кубов. После сокращения будем иметь в квадратных скобках

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$$

Отв. $\sqrt[8]{(a-b)^2}$.

103. Дробь $\frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}$ сокращаем на $\sqrt[3]{x}$. Выражение в квадратных скобках преобразуется к виду $\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$. Эту дробь сокращаем на $\sqrt{x}+2$. Заданное выражение равно

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)^{-2}-\sqrt{(x+4)^2}=(\sqrt{x}-2)^2-|x+4|.$$

Предполагается, что $x>0$ (при отрицательном x корень $\sqrt[3]{x}$ не будет арифметическим, при $x=0$ данное выражение теряет смысл). Поэтому $x+4>0$.

Отв. $-4\sqrt{x}$.

104. Дробь в квадратных скобках равна

$$\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Заданное выражение равно

$$x^3\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=x^3\cdot 32x^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}=32x.$$

Отв. $32x$.

105. В числителе первой дроби выносим за скобку $\sqrt[4]{ax}$. Учитывая, что $\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{x}-\sqrt{a}$, сокращаем дробь. Первый сомножитель принимает вид

$$\left[-\sqrt[4]{ax}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right]^{-2}=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}=\sqrt{ax}.$$

Второй сомножитель есть $\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2}$. Так как $\sqrt{\frac{a}{x}}$ есть арифметический корень, то выражение $1+\sqrt{\frac{a}{x}}$ всегда положительно.

Отв. $\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})$.

106. Величины a и c должны быть положительными. Поэтому знаменатель первой дроби, который приводится к виду

$$\sqrt{2(a-b^2)^2+8ab^2}=\sqrt{2(a+b^2)^2},$$

равен $\sqrt{2}(a+b^2)$. Числитель этой дроби равен $\sqrt{3}(a+b^2)$. Вторая дробь равна $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{ac}$.

Отв. $-\sqrt{ac}$.

107. Уменьшаемое равно

$$\left\{\sqrt{1+\left[a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1\right]}\right\}^{-6}=\frac{x^2}{a^2}.$$

Подкоренное выражение вычитаемого равно $(a^2+x^2)^2$ (величина a^2+x^2 положительна).

Отв. -1.

108. Выражение в квадратных скобках равно $\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$; возведя в степень -2, получим $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{4\sqrt{x}}$. Делитель после сокращения на $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ равен $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{4}$.

Отв. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

109. В числителе дроби выносим за скобку $\sqrt[6]{x}$; сокращаем дробь; заданное выражение принимает вид

$$(2\sqrt[6]{x})^3+4x+4+(\sqrt{x}+1)^2=5x+10\sqrt{x}+5.$$

Отв. $5(\sqrt{x}+1)^2$.

110. В первой дроби переведём $x^{-\frac{1}{3}}$ в знаменатель (с положительным показателем); дробь окажется равной $\frac{3}{x-2}$.

Вторую дробь сокращаем на $x^{\frac{1}{3}}$. Заданное выражение принимает вид

$$\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}=\frac{(x-2)(x-1)}{2x-1}-\frac{3x-2}{1-2x}.$$

Отв. $\frac{x^2}{2x-1}$.

111. Первый сомножитель равен $\frac{1}{a}$. Возведя в квадрат выражение в квадратных скобках, получим $2a^2-2ab$.

Отв. $2(a-b)$.

112. Разность $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}=x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$ возводим в куб; числитель дроби равен

$$3x-3x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=3x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right),$$

знаменатель дроби равен

$$-3a-3x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=-3a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right).$$

Сократив дробь, получим $-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$. Заданное выражение равно

$$\left(-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^3+\sqrt{[(a+x)^3]^{\frac{2}{3}}:a}=1.$$

Отв. 1.

113. Числитель первой дроби равен

$$a+2\sqrt{ab}-3b=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}-3(\sqrt{b})^2=$$
$$=(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

Отв. $\frac{1}{2b}$.

114. Знаменатель первой дроби в круглых скобках

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-6\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right).$$

Знаменатель второй дроби равен $\left(a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)^2$. Аналогично разлагаем на множители числители.

Отв. $\frac{5}{a-9b}$.

115. Дробь в скобках сокращаем на $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Первая из дробей, в сумме составляющих данное выражение, равна

$$\frac{3\sqrt{a}(a-\sqrt{ab}+b)}{3\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3]}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Вторая дробь равна

$$\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}(a-b)}=-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Отв. 0.

116. *Отв.* 3.

117. Освобождаемся от отрицательных показателей. Выражение

$$a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3$$

разлагаем на множители.

Отв. 1.

118. Преобразовав первое слагаемое в квадратных скобках, получим

$$\frac{1-a^2}{\sqrt[3]{a}\left[(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}+1\right]\left[(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}+1\right]}.$$

Числитель этой дроби равен

$$(1-a)(1+a)=\left[1-(\sqrt[3]{a})^3\right]\left[1+(\sqrt[3]{a})^3\right].$$

Сумму и разность кубов разлагаем на множители.

Отв. a.

119. В числителе дроби выносим за скобку $\sqrt[3]{a}$. Множимое равно $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}$, а множитель $4\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}\right)$.

Отв. $4(a-x)$.

120. Дробь представим в виде

$$\frac{\sqrt{a}\left[(\sqrt{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3\right]}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}=\sqrt{a}\left(a+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right).$$

Выражение в первых скобках (делимое) равно

$$\sqrt{a}\left(a+2\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2.$$

Делитель равен $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)$.

Отв. a.

121. Знаменатель уменьшаемого равен $\sqrt{a}\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{x}\right)$, а числитель $\sqrt{a}\sqrt[4]{x}\left[(\sqrt{a})^3+(\sqrt[4]{x})^3\right]$. После сокращения приведём уменьшаемое к виду $a-\sqrt{a}\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}$. Вычитаемое равно $\sqrt{(a+\sqrt{x})^2}=|a+\sqrt{x}|$. Вместо последнего выражения можно написать $a+\sqrt{x}$, так как $a+\sqrt{x}$ есть положительная величина (величина a не может быть отрицательной, ибо в данное выражение входит $\sqrt{a}$).

Отв. a^2x.

122. Сомножители знаменателя равны $1+\sqrt[4]{x}$ и $1-\sqrt[4]{x}$. Числитель можно представить в виде $-x\left(1-\sqrt{x}\right)$.

Отв. $-x^3$.

123. Числитель дроби в квадратных скобках равен

$$\sqrt[4]{a^3}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)+b\sqrt[4]{b^2}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=$$
$$=\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)\left[(\sqrt[4]{a})^3+(\sqrt{b})^3\right]=$$
$$=\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}\sqrt{b}+b\right).$$

Заданное выражение равно

$$\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}\sqrt{b}\right)^{-1}+\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}-\sqrt[4]{a}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}\right)}-\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}}=0.$$

Отв. 0.

124. Числитель уменьшаемого равен

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{x})^2}-\frac{\sqrt[3]{ax}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}.$$

Отв. $\sqrt[6]{a}$.

125. Сначала складываем первые две дроби; общий знаменатель равен

$$\left[\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)+a^{\frac{1}{8}}\right]\left[\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)-a^{\frac{1}{8}}\right]=\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)^2-a^{\frac{1}{4}}=$$
$$=a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1.$$

Получим $\frac{2\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1}$. Теперь вычитаем третью дробь; общий знаменатель $a+a^{\frac{1}{2}}+1$.

Отв. $\frac{4}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}$.

126. $\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}=$
$$=\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^2(3+2\sqrt{2})}=1.$$

Аналогичное преобразование выполняем в знаменателе. Подкоренное буквенное выражение в числителе равно $(\sqrt{x}-2)^3$. Дробь $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ сокращается на $\sqrt{x}-1$.

Отв. 1.

127. Числитель первой дроби равен

$$a^2\sqrt[6]{a^5b^3}+ab\sqrt[6]{a^5b^3}=a(a+b)\sqrt[6]{a^5b^3}.$$

Знаменатель преобразуется к виду $(b+a)(b-2a)\sqrt[6]{a^3b^3}$. Таким образом, первая дробь равна $\frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a}$. Делимое в круг-

лых скобках равно $\frac{3a^2}{(b-2a)(3-b)}$. Разделив его на $\frac{a+b}{3a-ab}$, получаем $\frac{3a^3}{(b-2a)(a+b)}$. Вычитая из этого $\frac{ab}{a+b}$, найдём $\frac{a(3a^2+2ab-b^2)}{(a+b)(b-2a)}$.

Заданное выражение равно

$$\frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a}-\frac{a^{-\frac{2}{3}}a(3a-b)}{b-2a}=\sqrt[3]{a}.$$

Отв. $\sqrt[3]{a}$.

128. Множимое равно $\frac{2x+a}{2x-a}$. Выражение во вторых скобках равно $\sqrt{2x-a}$.

Отв. $2x+a$.

129. *Отв.* $\sqrt{2}$.

130. *Отв.* $\frac{1}{x(x-1)}$.

131. Уменьшаемое равно $\frac{1}{a+b}$, а вычитаемое равно $\frac{b}{(a+b)(a+2b)}$.

Отв. $\frac{1}{a+2b}$.

132. Первое слагаемое равно $\frac{a}{a+b}$; второе слагаемое равно $\frac{b}{a}\cdot\frac{2a+b}{a+b}$.

Отв. $\frac{a+b}{a}$.

133. Первое слагаемое равно $\frac{a-b}{ab}$; второе равно $\frac{1}{a}$.

Отв. $\frac{1}{b}$.

134. *Отв.* $\frac{2b-a}{2b+a}$.

ГЛАВА 3

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ[1])

135. Дробь $\frac{6b+7a}{6b}$ представим в виде $1+\frac{7}{6}\frac{a}{b}$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{a(b-3a)}{2b^2(b-a)}y=\frac{7}{6}\frac{a}{b},$$

откуда $y=\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$.

Отв. $y=\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$.

136. Освобождаемся от знаменателя (общий знаменатель a^2-b^2).

Отв. $x=0$.

137. Решая данное уравнение по общему способу, получим

$$x=\frac{3abc+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{ab+bc+ca}.$$

Эту дробь можно сократить, разложив числитель на множители (выражение $3abc$ представим в виде трёхчлена $abc+$ $+abc+abc$ и каждый из последующих членов сгруппируем с abc). Получим $x=a+b+c$.

Решение упрощается с помощью следующего искусственного приёма. Слагаемое $\frac{x-a-b}{c}$ представим в виде

---

[1]) При решении задач этой главы не рассматриваются исключительные значения известных величин, при которых данное уравнение теряет смысл или лишается решений, или приобретает больше решений. Так, в задаче 135 данное уравнение теряет смысл при $b=0$ и при $b-a=0$, ибо при $b=0$ знаменатели первого и второго членов обращаются в нуль, а при $b-a=0$ то же происходит с последним членом.

Далее, при $a=0$ данное уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как уравнение принимает вид $1=1$ и становится тождеством. Наконец, при $b=3a$ данное уравнение совсем не имеет решений, так как оно приводится к виду $0\cdot y=\frac{7}{18}$.

$\frac{x-(a+b+c)}{c}+1$ и аналогично два других слагаемых левой части. Уравнение примет вид:

$$[x-(a+b+c)]\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

Отв. $x=a+b+c$.

138. Общий знаменатель $6cd(2c+3d)(2c-3d)$.

Отв. $z=\frac{c(4c^2-9d^2)}{8c^2+27d^2}$.

139. Представим дробь $\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}$ в виде $\frac{2n^2(x-1)}{1-n^4}$ (чтобы получить тот же знаменатель, что у следующей дроби). Дробь $\frac{x-1}{n-1}$ полезно преобразовать к виду $\frac{1-x}{1-n}$. Переносим все члены влево и группируем их (первый с четвёртым, второй с третьим). Получаем

$$(1-x)\left(\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)+\frac{1}{1-n^4}[2n^2(x-1)-(2x-1)]=0.$$

Преобразовав $\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}$ к виду $\frac{2}{1-n^2}$, освободимся от знаменателя.

Отв. $x=\frac{3}{4}$.

140. Переносим члены с x в левую часть уравнения, а известные в правую, и каждую часть отдельно приводим к общему знаменателю; получим

$$\frac{(3ab+1)(a+1)^2-(2a+1)}{a(a+1)^2}x=\frac{3ab(a+1)^2+a^2}{(a+1)^3},$$

или

$$\frac{3ab(a+1)^2+a^2+2a+1-2a-1}{a(a+1)^2}x=\frac{a[3b(a+1)^2+a]}{(a+1)^3}.$$

Отсюда

$$\frac{a[3b(a+1)^2+a]}{a(a+1)^2}x=\frac{a[3b(a+1)^2+a]}{(a+1)^3}.$$

После сокращения находим

$$x=\frac{a}{a+1}.$$

Отв. $x=\frac{a}{a+1}$.

141. Производим группировку членов, как в задаче **140**; после преобразований получим

$$\frac{ab\,[3c\,(a+b)^2+ab]}{(a+b)^3}=\frac{a\,[3c\,(a+b)^2+ab]}{a\,(a+b)^2}\,x.$$

Отв. $x=\frac{ab}{a+b}$.

142. Общий знаменатель $(a+b)^2(a-b)$.

Отв. $x=\frac{m\,(a+b)}{a}$.

143. Дробь $\frac{mz}{m^2-z^2}$ представим в виде $\left(-\frac{mz}{z^2-m^2}\right)$. Общий знаменатель будет $mz\,(z^2-m^2)$. Освободившись от него, получаем после приведения подобных членов $m^2z^2-4m^3z=0$. Это уравнение имеет два корня: $z=0$ и $z=4m$. Но при отбрасывании знаменателя, содержащего неизвестную величину, могут появиться лишние корни; а именно, лишними будут те, которые обращают общий знаменатель в нуль. В данном случае лишним является корень $z=0$. Он не удовлетворяет данному уравнению потому, что первый и третий члены теряют смысл при $z=0$. Корень $z=4m$ не обращает в нуль общий знаменатель; поэтому он не является лишним.

Отв. $z=4m$.

144. Общий знаменатель будет b^4-x^2. Освобождаясь от него, получим $2x\,(a^2+b^2-2ab)=2\,(a^2-b^2)$, откуда $x=\frac{a+b}{a-b}$. Лишних корней нет, потому что знаменатель b^4-x^2 не обращается в нуль при $x=\frac{a+b}{a-b}$.

Отв. $x=\frac{a+b}{a-b}$.

145. Общий знаменатель $(x^2-a^2)(x+n)$. Освобождаясь от знаменателя, найдём $x=\frac{n^2}{a}$. При этом значении x знаменатель не обращается в нуль. Значит, $x=\frac{n^2}{a}$ есть корень данного уравнения.

Отв. $x=\frac{n^2}{a}$.

146. Представим $x+a^{-1}$ в виде $x+\frac{1}{a}$. После преобразований получим

$$\frac{2a}{ax+1}:\frac{2}{ax+1}=\frac{x}{2}.$$

Сокращая на $ax+1$, найдём $x=2a$.

Замечание. Сокращение на $ax+1$ возможно при условии, что $ax+1$ не равно нулю. Но при $x=2a$ имеем $ax+1=2a^2+1>0$. Поэтому полученный корень — не лишний. Но если бы мы имели, например, уравнение $\frac{2a}{x-2a}:\frac{2}{x-2a}=\frac{x}{2}$, то сокращение на $x-2a$ дало бы тоже $x=2a$. Однако этот корень не годится, ибо дроби $\frac{2a}{x-2a}$ и $\frac{2}{x-2a}$ теряют смысл при $x=2a$. Таким образом, уравнение $\frac{2a}{x-2a}:\frac{2}{x-2a}=\frac{x}{2}$ не имеет решений.

Отв. $x=2a$.

147. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{a+x}{a^2+x^2+ax}+\frac{a-x}{a^2+x^2-ax}=\frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}.$$

Общий знаменатель левой части $(a^2+x^2+ax)(a^2+x^2-ax)$ можно преобразовать так:

$$(a^2+x^2)^2-(ax)^2=a^4+a^2x^2+x^4.$$

Получаем

$$\frac{2a^3}{a^4+a^2x^2+x^4}=\frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}.$$

Отв. $x=\frac{3}{2a^2}$.

148. Переносим члены с неизвестным в левую часть уравнения, а члены, не содержащие неизвестного, в правую:

$$(a-b-1)\sqrt{x}=(a^2-b^2)-(a+b).$$

После разложения правой части на множители получим

$$(a-b-1)\sqrt{x}=(a+b)(a-b-1).$$

Отсюда имеем $\sqrt{x}=a+b$.

Так как выражение $\sqrt{x}$ означает положительное значение квадратного корня, то при $a+b<0$ задача не имеет решения.

Отв. $x=(a+b)^2$ (при условии, если $a+b\geqslant 0$).

149. После освобождения от знаменателя и приведения подобных членов получим $2x^2+6ax+3a^2=0$.

Отв. $x_1=\frac{a(\sqrt{3}-3)}{2}$; $x_2=-\frac{a(\sqrt{3}+3)}{2}$.

150. Общий знаменатель будет $4(x+b)(x-b)$. После упрощения получим

$$12x^2-4bx-b^2=0.$$

Отв. $x_1=\frac{b}{2}$; $x_2=-\frac{b}{6}$.

151. Общий знаменатель будет $(x-a)^2$. После освобождения от знаменателя получим

$$(x-a)^2-2a(x-a)+(a^2-b^2)=0.$$

Из этого квадратного уравнения находим

$$x-a=a\pm b.$$

Отв. $x_1=2a+b$; $x_2=2a-b$.

152. Общий знаменатель будет $bc^2(a-2b)$. После освобождения от знаменателя получим

$$(cx)^2-(a-2b)\cdot(cx)-b(a-b)=0.$$

Из этого уравнения находим

$$cx=\frac{(a-2b)\pm a}{2}.$$

Отв. $x_1=\frac{a-b}{c}$; $x_2=-\frac{b}{c}$.

153. Освобождаясь от знаменателя, получим уравнение $4x(x-a)+8x(x+a)=5a^2$ или, после упрощения,

$$12x^2+4ax-5a^2=0.$$

Отв. $x_1=\frac{a}{2}$; $x_2=-\frac{5a}{6}$.

154. Общий знаменатель $n(nx-2)$. После упрощений уравнение принимает вид

$$(n-1)x^2-2x-(n+1)=0.$$

Отв. $x_1=\frac{n+1}{n-1}$; $x_2=-1$.

155. Общий знаменатель будет $a(a-x)^2$. После упрощений получим уравнение

$$(a+1)x^2-2ax+(a-1)=0.$$

Отв. $x_1=1$; $x_2=\frac{a-1}{a+1}$.

156. Общий знаменатель будет $(x-a)^2$. После освобождения от знаменателя получаем уравнение

$$(x-a)^2-2b(x-a)-(a^2-b^2)=0,$$

решая которое, находим

$$x-a=b\pm a.$$

Отв. $x_1=2a+b$; $x_2=b$.

157. Общий знаменатель $nx(x-2)(x+2)$. После упрощений получим уравнение

$$x^2-(2-n)x-(2n^2+4n)=0.$$

Отв. $x_1=n+2$; $x_2=-2n$.

158. Первый способ. После обычных преобразований получаем уравнение

$$x^2+(a-2n-2a+n)x-(a-2n)(2a-n)=0.$$

Решение последнего уравнения можно найти сразу, если обратить внимание на то, что свободный член есть произведение величин $-(a-2n)$ и $(2a-n)$, а коэффициент при x есть сумма тех же величин, взятая с обратным знаком.

Второй способ. Переносим единицу из правой части в левую, получим:

$$\frac{a+x-2n}{2a-n}-\frac{a-2n+x}{x}=0,$$

или

$$(a-2n+x)\left(\frac{1}{2a-n}-\frac{1}{x}\right)=0;$$

отсюда: 1) $a-2n+x=0$ или $x_1=2n-a$,

2) $\frac{1}{2a-n}-\frac{1}{x}=0$ или $x_2=2a-n$.

Отв. $x_1=2n-a$; $x_2=2a-n$.

159. Получаем уравнение

$$(n-1)^2 x^2 - a(n-1)x + (a-1) = 0;$$

чтобы избежать действий с дробями, можно положить $(n-1)x = z$ или непосредственно найти $(n-1)x$ из уравнения

$$[(n-1)x]^2 - a[(n-1)x] + a - 1 = 0.$$

Получим

$$(n-1)x_1 = a-1; \quad (n-1)x_2 = 1.$$

Отв. $x_1 = \frac{a-1}{n-1}$; $x_2 = \frac{1}{n-1}$.

160. Знаменатель левой части равен $(a-x)^2$. Помножив на него обе части уравнения, найдём

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{5}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2, \qquad \frac{4}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2.$$

Извлекая корень, получаем одно из двух уравнений:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a-x}{x} = \frac{a}{a+b} \quad \text{и} \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{a-x}{x} = -\frac{a}{a+b}.$$

Отв. $x_1 = \frac{2a(a+b)}{5a+2b}$; $x_2 = \frac{2a(a+b)}{2b-a}$.

161. Преобразуем сначала выражение

$$(1+ax)^2 - (a+x)^2 = 1 + a^2x^2 - a^2 - x^2.$$

Группируя в правой части первый член с последним, а второй с третьим, получаем $(1-x^2)(1-a^2)$. Теперь заданное уравнение приводится к виду

$$x(x+1) = \frac{ab}{(a-b)^2}.$$

Отв. $x_1 = \frac{a}{b-a}$; $x_2 = \frac{b}{a-b}$.

162. Трёхчлен ax^2+bx+c разлагается на множители первой степени следующим образом: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$; здесь x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. В данном случае $a=-3$, $x_1=7$; $x_2 = -\frac{10}{3}$, так что получаем $-3(x-7)\left(x+\frac{10}{3}\right)$.

Отв. $(7-x)(3x+10)$.

163. Так как

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{ab},$$

то можно по догадке разложить $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ на множители $\frac{a+b}{a}$ и $\frac{a-b}{b}$ $\left(\text{их сумма равна } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Но надо еще выяснить, будет ли это решение единственным. Пусть u и v — искомые множители. По условию

$$uv=\frac{a}{b}-\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad u+v=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

Следовательно, u и v — корни квадратного уравнения

$$x^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)x+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=0.$$

В выражения для u и v войдет радикал

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}.$$

Зная заранее, что задача допускает рациональное решение, постараемся освободиться от радикала. Для этого напишем вместо $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$ выражение $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$ и для компенсации прибавим $4\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}$, т. е. 4; тогда под радикалом получим полный квадрат $\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)-2\right]^2$.

Отв. $\frac{a+b}{a}$, $\frac{a-b}{b}$.

164. $15x^3+x^2-2x=x(15x^2+x-2)$. Корнями уравнения $15x^2+x-2=0$ будут $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=-\frac{2}{5}$. Следовательно,

$$15x^2+x-2=15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)=(3x-1)(5x+2).$$

Отв. $x(3x-1)(5x+2)$.

165. Первый способ. Сумму $2x^4+4x^2+2$ представляем в виде $2(x^2+1)^2$.

Второй способ. Располагаем многочлен по убывающим степеням x и член $4x^2$ разлагаем на два слагаемых $2x^2+2x^2$, после этого группируем первые три члена и последние три и разлагаем на множители.

Отв. $(x^2+1)(2x^2+x+2)$.

165а. Левую часть уравнения напишем так:

$$(1-x^2)^2+4x^2.$$

Уравнение примет вид

$$(1-x^2)^2-4x(1-x^2)+4x^2=0,$$

или

$$[(1-x^2)-2x]^2=0.$$

Отв. $x_1=-1+\sqrt{2}$; $x_2=-1-\sqrt{2}$.

166. Искомое уравнение есть $\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{a}\right)=0$.

Отв. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$.

167. Согласно теореме Виета корни x_1, x_2 уравнения $x^2+px+q=0$ в сумме дают $-p$, а в произведении q. Значит,

$$p=-\left(\frac{1}{10-\sqrt{72}}+\frac{1}{10+\sqrt{72}}\right)=\frac{-2\cdot 10}{100-72}=-\frac{20}{28},$$

$$q=\frac{1}{10-\sqrt{72}}\cdot\frac{1}{10+\sqrt{72}}=\frac{1}{28}.$$

Искомое уравнение: $x^2-\frac{20}{28}x+\frac{1}{28}=0$.

Отв. $28x^2-20x+1=0$.

168. Решается аналогично предыдущей задаче.

Отв. $bx^2-2a\sqrt{a}\,x+a^2=0$.

169. По теореме Виета $x_1x_2=12$; по условию $x_1-x_2=1$. Из этих уравнений можно найти x_1 и x_2 (4 и 3 или -3 и -4) и затем $p=-(x_1+x_2)=\pm 7$.

Но для разыскания x_1+x_2 нет необходимости определять x_1 и x_2 по отдельности. Можно вычислить

$$(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2=1^2+4\cdot 12=49,$$

откуда $p=-(x_1+x_2)=\pm 7$.

Отв. $p=\pm 7$.

170. Имеем

$$x_1x_2=\frac{1}{5};\quad x_1-x_2=1.$$

Далее, как в предыдущей задаче, находим $x_1+x_2=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$ и учитываем, что $x_1+x_2=\frac{k}{5}$.

Отв. $k=\pm 3\sqrt{5}$.

171. Имеем

$$x_1^2+x_2^2=1{,}75;\quad x_1x_2=a^2;\quad x_1+x_2=3a.$$

Здесь три неизвестных x_1, x_2, a. Нам нужно найти a. Возводя третье уравнение в квадрат и вычитая удвоенное второе, находим $x_1^2+x_2^2=7a^2$. Сопоставляя это с первым уравнением, находим $7a^2=1{,}75$.

Отв. $a=\pm\frac{1}{2}$.

172. По теореме Виета

$$p+q=-p \quad \text{и} \quad pq=q.$$

Эта система имеет два решения: 1) $p=0$, $q=0$; 2) $p=1$, $q=-2$. В первом случае имеем уравнение $x^2=0$, во втором $x^2+x-2=0$.

Отв. 1) $p=0$, $q=0$,
2) $p=1$; $q=-2$.

173. Корни искомого уравнения будут $y_1=\frac{x_1}{x_2}$ и $y_2=\frac{x_2}{x_1}$. Выразим y_1+y_2 через коэффициенты a, b, c. Для этого преобразуем $y_1+y_2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$ к виду $\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$ и заменим (x_1+x_2) через $-\frac{b}{a}$, а x_1x_2 через $\frac{c}{a}$. Получим $\frac{b^2-2ac}{ac}$. Кроме того, имеем $y_1y_2=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}=1$. Следовательно, искомое уравнение есть

$$y^2-\frac{b^2-2ac}{ac}y+1=0.$$

Отв. $acy^2-(b^2-2ac)y+ac=0$.

174. Эту задачу можно решить как и предыдущую, но лучше итти более коротким путем.

В первом случае о б а корня искомого уравнения должны быть вдвое больше соответствующих корней данного уравнения. Значит, нужно найти неизвестную величину y, которая вдвое больше неизвестной величины x, удовлетворяющей уравнению $ax^2+bx+c=0$. Из условия $y=2x$ находим $x=\frac{y}{2}$ и, подставляя в данное уравнение, получаем

$$a\left(\frac{y}{2}\right)^2+b\left(\frac{y}{2}\right)+c=0.$$

Во втором случае делаем подстановку $x=\frac{1}{y}$. Получаем

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\left(\frac{1}{y}\right)+c=0.$$

Отв. 1) $ay^2+2by+4c=0$;
2) $cy^2+by+a=0$.

175. Первый способ (см. решение задачи **173**). Имеем

$$y_1+y_2=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2).$$

Подставляя сюда $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$, находим $y_1+y_2=-\frac{b^3-3abc}{a^3}$. Далее, $y_1y_2=(x_1x_2)^3=\frac{c^3}{a^3}$, и по теореме Виета составляем искомое уравнение.

Второй способ (см. решение задачи **174**). По условию $y=x^3$, т. е. $x=\sqrt[3]{y}$. Подставляя в данное уравнение, получаем

$$a\sqrt[3]{y^2}+b\sqrt[3]{y}=-c.$$

Чтобы избавиться от иррациональности, возведём обе части уравнения в куб и преобразуем сумму $3(a\sqrt[3]{y^2})^2b\sqrt[3]{y}+3a\sqrt[3]{y^2}(b\sqrt[3]{y})^2$ к виду $3aby\left[a(\sqrt[3]{y})^2+b\sqrt[3]{y}\right]$. Выражение в скобках в силу найденного уравнения равно $-c$.

Отв. $a^3y^2+(b^3-3abc)y+c^3=0$.

176. Всякое уравнение n-й степени, имеющее корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно представить в виде

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0.$$

Биквадратное же уравнение имеет всегда две пары корней, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку. Полагая $x_3 = -x_1$ и $x_4 = -x_2$, можно записать биквадратное уравнение в виде

$$(x-x_1)(x-x_2)(x+x_1)(x+x_2)=0, \text{ т. е. } (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)=0$$

или

$$x^4-(x_1^2+x_2^2)x^2+x_1^2x_2^2=0.$$

Но по условию

$$x_1^2+x_2^2+(-x_1)^2+(-x_2)^2=50$$

и

$$x_1x_2(-x_1)(-x_2)=144.$$

Следовательно,

$$x_1^2+x_2^2=25 \quad \text{и} \quad x_1^2x_2^2=144.$$

Отв. $x^4-25x^2+144=0$.

177. Если алгебраическое уравнение (с действительными коэффициентами) имеет комплексный корень $a+bi$, то корнем его является также и комплексное число $a-bi$ (сопряжённое с числом $a+bi$). Таким образом, нам известны два сопряжённых корня заданного уравнения $3+i\sqrt{6}$ и $3-i\sqrt{6}$. Оба эти корня можно проверить непосредственно, но проще предварительно выполнить следующее преобразование.

По теореме Безу левая часть уравнения должна делиться (без остатка) на выражения $x-(3+i\sqrt{6})$ и $x-(3-i\sqrt{6})$, а следовательно, и на произведение этих выражений, т. е. на $[(x-3)-i\sqrt{6}][(x-3)+i\sqrt{6}]=x^2-6x+15$. Выполнив деление, мы разложим левую часть на два множителя: $4x^4-24x^3+57x^2+18x-45=(x^2-6x+15)(4x^2-3)$, и данное уравнение распадается на два:

$$1)\ x^2-6x+15=0 \quad \text{и} \quad 2)\ 4x^2-3=0.$$

Первое имеет корни $x_1=3+i\sqrt{6}$ и $x_2=3-i\sqrt{6}$; корнями второго являются $x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отв. $x_1=3+i\sqrt{6}$; $x_2=3-i\sqrt{6}$; $x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

178. По условию $x=2$ должно удовлетворять заданному уравнению. Поэтому мы имеем $6\cdot 2^3-7\cdot 2^2-16\cdot 2+m=0$, откуда $m=12$. Получаем уравнение $6x^3-7x^2-16x+12=0$, один из корней которого равен 2. По теореме Безу его левая часть должна делиться на $(x-2)$. Разделив, найдём $6x^2+5x-6$. Следовательно, уравнение можно представить в виде $(x-2)(6x^2+5x-6)=0$. Корнями его, кроме корня $x_1=2$, являются корни x_2, x_3 уравнения $6x^2+5x-6=0$.

Отв. $m=12$; $x_2=\frac{2}{3}$; $x_3=-\frac{3}{2}$.

179. Подставляя в данное уравнение $x=2$ и $x=3$ (см. решение предыдущей задачи), получаем

$$4m+n=10 \quad \text{и} \quad 9m+n=-15.$$

Из этой системы находим $m=-5$, $n=30$ и получаем уравнение $2x^3-5x^2-13x+30=0$. Левая часть должна делиться на $x-2$ и на $x-3$ и, следовательно, на произведение $(x-2)(x-3)$. Уравнение перепишется в виде $(x-2)(x-3)(2x+5)=0$. Корни его $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-\frac{5}{2}$.

Отв. $m=-5$; $n=30$; $x_3=-\frac{5}{2}$.

180. Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет равные корни, когда подкоренное выражение $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ равно нулю. В данном случае должно быть $(a\sqrt{a^2-3})^2-4=0$, т. е. $a^4-3a^2-4=0$. Это биквадратное уравнение имеет два действительных корня ($a=2$ и $a=-2$) и два мнимых ($a=i$ и $a=-i$). Ограничиваясь действительными корнями[1]), получаем уравнение $x^2+4x+4=0$ и $x^2-4x+4=0$; первое имеет корни $x_1=x_2=-2$, второе имеет корни $x_1=x_2=2$.

Отв. При $a=2$ и при $a=-2$.

---

[1]) Мы предполагаем, что коэффициенты заданного уравнения являются действительными числами.

180а. Корни уравнения будут

$$x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-m^2+1}=m\pm1.$$

По условию имеем

$$\begin{cases}-2<m+1<4,\\ -2<m-1<4\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}-3<m<3,\\ -1<m<5.\end{cases}$$

Отв. $-1<m<3$.

181. Уединим один из радикалов, например первый. Получим $\sqrt{y+2}=2+\sqrt{y-6}$.

Возведём обе части в квадрат. После приведения подобных членов и сокращения на 4 будем иметь $\sqrt{y-6}=1$, откуда $y=7$. Проверка показывает, что этот корень годен.

Отв. $y=7$.

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем мы считаем корни квадратные и вообще корни чётных степеней арифметическими. См. предварительные замечания в начале решений главы 2 (стр. 122—125). Относительно корней нечётных степеней см. ниже подстрочное примечание к задаче **209**.

Замечание 2. Проверка делается для того, чтобы обнаружить лишние корни (они могут получиться при возведении обеих частей уравнения в квадрат). В данной задаче лишних корней нет. Но возьмём уравнение $\sqrt{y+2}+\sqrt{y-6}=2$, отличающееся от данного только знаком. Решая его тем же способом, получим $\sqrt{y-6}=-1$. Возведя в квадрат, найдём тот же корень $y=7$. Он не годится; взятое уравнение вовсе не имеет решения. Здесь можно было бы обойтись и без проверки, так как и без того видно, что $\sqrt{y-6}$ не может равняться -1 (см. замечание 1). Но в других случаях (см. задачу **184** и **190**) без проверки обойтись нельзя.

182. Решается, как предыдущая задача.

Отв. $x=6$.

183. Уединив первый радикал, возведя в квадрат и упростив, получим $x-1=2\sqrt{x-1}$. Снова возведя в квадрат, находим $(x-1)^2-4(x-1)=0$. Это уравнение можно разделить на $x-1$, предварительно учтя, что $x=1$ есть один из корней. Тогда найдём другой корень $x=5$. Можно также раскрыть скобки и решить квадратное уравнение. Проверка показывает, что оба корня годятся.

Отв. $x_1=1$, $x_2=5$.

184. Поступая как в предыдущей задаче, найдём $x+22=7\sqrt{3x-2}$, а отсюда $x^2-103x+582=0$. Это уравнение имеет два корня: $x_1=6$ и $x_2=97$. Данному уравнению удовлетворяет только первый корень, второй — лишний (он удовлетворяет уравнению $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=7$, отличающемуся от данного знаком при радикале).

Отв. $x=6$.

185. Решается, как предыдущая задача. Из двух корней $x_1=-1$; $x_2=3$ второй лишний.

Замечание. $x=3$ есть корень уравнения

$$-\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1.$$

Отв. $x=-1$.

186. *Отв.* $x_1=34$; $x_2=2$.

187. *Отв.* $x=4$.

188. Возводим в квадрат. Получаем уравнение

$$x\sqrt{x^2+24}-x^2-2x=0.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$x=0 \text{ и } \sqrt{x^2+24}-x-2=0.$$

Второе даёт $x=5$. Выполняем проверку.

Отв. $x_1=0$; $x_2=5$.

189. Данное уравнение приводим к виду

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}}.$$

Возводим в квадрат и помножаем на x^2 (при умножении на x^2 есть опасность ввести лишний корень $x=0$). Получаем уравнение

$$1+\frac{2}{3}x=x\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}.$$

Снова возводим в квадрат.

Отв. $x=\frac{3}{4}$.

190*. Помножив обе части уравнения на $\sqrt{(x+2)(x+3)}$, получим

$$\sqrt{(x-5)(x+3)}+\sqrt{(x-4)(x+2)}=7.$$

Поступая как в задаче **181**, найдём

$$\sqrt{(x-4)(x+2)}=4.$$

Отсюда получим два корня $x_1=6$, $x_2=-4$. Проверка показывает, что x_2 не годится, получается неверное равенство $\frac{7}{2}\sqrt{2}=-\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

Отв. $x=6$.

191. Освобождаемся от знаменателя. Получаем

$$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=7.$$

Это уравнение имеет два корня $x=5$ и $x=-5$. Однако при $x=-5$ выражение $\sqrt{x-3}$ не имеет арифметического значения (см. замечание 1 к задаче **181**).

Отв. $x=5$.

192. Приведём левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{3x-5\sqrt{x^2+x}}{-x}=\frac{3}{x}.$$

Отсюда

$$3(x+1)=5\sqrt{x(x+1)}.$$

После возведения в квадрат получаем

$$9(x+1)^2-25(x+1)x=0$$

или

$$(x+1)[9(x+1)-25x]=0.$$

Отв. $x_1=-1$; $x_2=\frac{9}{16}$.

193. Решается, как предыдущая задача.

Отв. $x_1=2$; $x_2=-1{,}6$.

194. Возводим обе части данного уравнения в квадрат. После тождественных преобразований получим $\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$. При возведении в квадрат есть опасность ввести посторонний корень, удовлетворяющий уравнению, отличающемуся от

данного знаком правой части. Уравнение $\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$ имеет единственный корень $x=21$. Он не является посторонним, так как $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}>\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{21}}$.

Отв. $x=21$.

195. Перепишем уравнение так:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Освободимся от знаменателя; при этом есть опасность ввести лишний корень $x=0$ (так как знаменатель обращается в нуль при $x=0$). Других лишних корней быть не может, так как $x=0$ есть единственный корень уравнения $\sqrt{x+\sqrt{x}}=0$ (см. решение задачи **143**).

После упрощений получаем уравнение

$$2x-2\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x}=0,$$

одним из корней которого является $x=0$. Однако этот корень лишний, так как при $x=0$ правая часть исходного уравнения теряет смысл. Выносим за скобку $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}(2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}-1)=0.$$

Решая уравнение $2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}-1=0$ (см. решение задачи **181**), находим $x=\frac{25}{16}$. Выполняем проверку.

Отв. $x=\frac{25}{16}$.

196. Сначала освобождаемся от иррациональности в знаменателе. Умножаем для этого числитель и знаменатель на $\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}$; получим

$$\frac{(\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x})^2}{2x}=\frac{27}{x}$$

или, после упрощений,

$$\frac{27+\sqrt{27^2-x^2}}{x}=\frac{27}{x}.$$

Отсюда находим $x=\pm 27$. Оба корня годятся.

Отв. $x=\pm 27$.

197. Уединив радикал, возведём обе части уравнения в квадрат. Будем иметь

$$x^2-2ax=-x\sqrt{x^2+a^2}.$$

Это уравнение имеет корень $x=0$. Для отыскания других корней разделим обе части уравнения на x (это можно сделать, так как теперь $x \neq 0$). После этого снова возведём обе части в квадрат. Получим $x=\frac{3}{4}a$.

При проверке можно придти к ошибочному заключению, что значения $x=0$ и $x=\frac{3}{4}a$ всегда удовлетворяют данному уравнению. Чтобы лучше уяснить суть ошибки, рассмотрим числовой пример. Когда $a=-1$, данное уравнение имеет вид

$$x=-1-\sqrt{1-x\sqrt{x^2+1}}.$$

Ни $x=0$, ни $x=\frac{3}{4}a=-\frac{3}{4}$ не удовлетворяют этому уравнению (оно не имеет решений). Так же будет при любом другом отрицательном значении a.

Источник ошибки в том, что величина $\sqrt{a^2}$ считается равной a, тогда как это верно лишь при $a \geqslant 0$. При $a<0$ мы имеем $\sqrt{a^2}=-a$; например, $\sqrt{(-3)^2}=-(-3)$.

Правильная общая формула (см. предварительное замечание, п. 3 на стр. 123) такова:

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Пользуясь этой формулой, мы найдём, что при $x=0$ (когда левая часть уравнения обращается в нуль) правая часть равна $a-\sqrt{a^2}=a-|a|$. При $a \geqslant 0$ это выражение тоже равно нулю, но при $a<0$ оно равно $2a$. Следовательно, если $a \geqslant 0$, то значение $x=0$ есть корень уравнения; если же $a<0$, то $x=0$ не является корнем. То же относится и к значению $x=\frac{3}{4}a$.

Отв. Если $a \geqslant 0$, то $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{4}a$; если $a<0$, уравнение не имеет решений.

198. Записанное без степеней с отрицательным показателем данное уравнение имеет вид[1])

$$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\frac{x}{a}}=\frac{1}{4}. \qquad (A)$$

Первый способ. Освобождаемся от знаменателя: $3\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=5\cdot\frac{x}{a}$. Левая часть положительна; значит, положительна и правая часть. Возводим в квадрат: $\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{9}{16}$. Отсюда $\frac{x}{a}=\frac{3}{4}$ $\left(\text{значение } -\frac{3}{4} \text{ исключается, ибо } \frac{x}{a}>0\right)$.

Второй способ. Уничтожаем иррациональность в знаменателе:

$$\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-\frac{x}{a}\right]^2=\frac{1}{4}.$$

Выражение, стоящее в скобках, не может быть отрицательным; поэтому $\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-\frac{x}{a}=\frac{1}{2}$ или $\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=$ $=\frac{1}{2}+\frac{x}{a}$. Возводим в квадрат: $1+\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2$, откуда $\frac{x}{a}=\frac{3}{4}$.

Отв. $x=\frac{3}{4}a$.

---

[1]) В первом издании авторы по досадному недосмотру совершили ошибку, против которой предупреждали в предыдущей задаче. Именно, уравнение (А) было ошибочно записано в следующем виде: $\frac{\sqrt{a^2+x^2}-x}{\sqrt{a^2+x^2}+x}=\frac{1}{4}$. Ошибка возникла так: в уравнении (А) числитель и знаменатель левой части были помножены на a, затем a было подведено под корень. Но равенство $a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=$ $=\sqrt{a^2+x^2}$ неверно при $a<0$. В этом случае имеем $a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=$ $=-\sqrt{a^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=-\sqrt{a^2+x^2}$. Вследствие указанной ошибки ответ, приведённый для случая $a<0$, был неверен.

199. Решается, как предыдущая задача. Применяя второй способ, найдём

$$(\sqrt{1+a^2x^2}-ax)^2=\frac{1}{c^2}.$$

Выражение $\sqrt{1+a^2x^2}-ax$ всегда положительно. Поэтому

$$\sqrt{1+a^2x^2}-ax=\frac{1}{|c|}, \text{ т. е. } \sqrt{1+a^2x^2}=ax+\frac{1}{|c|}.$$

Возводим в квадрат. Получаем $x=\frac{|c|^2-1}{2a|c|}$, или, что то же, $x=\frac{c^2-1}{2a|c|}$.

Проверка. Подставляя $x=\frac{c^2-1}{2a|c|}$, находим

$$1+a^2x^2=\frac{4c^2+(c^2-1)^2}{4c^2}=\frac{(c^2+1)^2}{4c^2}.$$

Учитывая, что величина c^2+1 всегда положительна, находим

$$\sqrt{1+a^2x^2}=\frac{c^2+1}{2|c|}.$$

Дальнейшие вычисления показывают, что данное уравнение всегда удовлетворяется.

Отв. $x=\frac{c^2-1}{2a|c|}$, т. е. при $c>0$ имеем $x=\frac{c^2-1}{2ac}$, при $c<0$ имеем $x=\frac{1-c^2}{2ac}$.

200. Вынесем за скобки в числителе и знаменателе левой части выражение $\sqrt{x+c}$ и сократим на него дробь[1]).

После сокращения получим

$$\frac{\sqrt{x+c}+\sqrt{x-c}}{\sqrt{x+c}-\sqrt{x-c}}=\frac{9(x+c)}{8c}.$$

Уничтожим иррациональность в знаменателе. После упрощений найдём $8\sqrt{x^2-c^2}=x+9c$. Отсюда $x=\frac{5c}{3}$ или $x=-\frac{29}{21}c$.

---

[1]) Сокращая на $\sqrt{x+c}$, мы предполагаем, что $x\neq -c$. Если бы, решив полученное уравнение, мы нашли $x=-c$, то это значение не было бы корнем данного уравнения. Однако из дальнейшего видно, что такого корня мы не получаем.

Проверка показывает, что оба эти значения удовлетворяют уравнению при $c>0$ и не удовлетворяют при $c\leqslant 0$.

Отв. При $c>0$ имеем $x_1=\frac{5}{3}c$ и $x_2=-\frac{29}{21}c$; при $c\leqslant 0$ уравнение не имеет решений.

201*. Перное подкоренное выражение преобразуем так: $x+3-4\sqrt{x-1}=(x-1)-4\sqrt{x-1}+4=(\sqrt{x-1}-2)^2$. Аналогично второе подкоренное выражение равно $(\sqrt{x-1}-3)^2$. Данное уравнение принимает вид

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1 \qquad (A)$$

(см. предварительное замечание к гл. 2, п. 3). Возможны три случая: 1) $\sqrt{x-1}>3$; 2) $\sqrt{x-1}<2$; 3) $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$.

В первом случае уравнение (A) принимает вид:

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1, \quad \text{или} \quad \sqrt{x-1}=3.$$

Этот результат не согласуется с условием $\sqrt{x-1}>3$.

Во втором случае уравнение (A) принимает вид:

$$-(\sqrt{x-1}-2)-(\sqrt{x-1}-3)=1, \quad \text{или} \quad \sqrt{x-1}=2.$$

Этот результат также не согласуется с условием $\sqrt{x-1}<2$. Остаётся третий случай, когда уравнение (A) принимает вид:

$$(\sqrt{x-1}-2)-(\sqrt{x-1}-3)=1. \qquad (B)$$

Это равенство является тождеством, следовательно, уравнение (A) удовлетворяется при всех x, для которых

$$2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3.$$

Так как величина $\sqrt{x-1}>0$, то все три части неравенства можно возвести в квадрат, после чего находим

$$5\leqslant x\leqslant 10,$$

т. е. решения данного уравнения содержатся в границе между 5 и 10 (включая и значения 5 и 10). Все они являются решениями данного уравнения, так как они подходят под случай 3, когда данное уравнение (A) обращается в тождество (B).

Отв. $5\leqslant x\leqslant 10$.

202. Возведём обе части уравнения в квадрат, перенесём все члены в одну сторону и вынесем за скобки $\sqrt{a+x}$:

$$\sqrt{a+x}\,(4\sqrt{a+x}+4\sqrt{a-x}-\sqrt{x})=0.$$

Это уравнение распадается на два. Из первого $\sqrt{a+x}=0$ находим $x=-a$. Проверка показывает, что при $a\geqslant 0$ это значение удовлетворяет данному уравнению. При $a<0$ уравнение теряет смысл (так как $\sqrt{a-x}$ становится мнимым). Второе уравнение есть $4(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})=\sqrt{x}$. Если его решать, как в задачах **183—187**, то получим (кроме заведомо лишнего корня $x=0$) $x=\frac{64a}{1025}$. Проверка покажет, что и это — лишний корень, так что второе уравнение вовсе не имеет решений. В этом проще убедиться, если применить следующий способ решения. Переведём иррациональность в знаменатель (помножив и разделив $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}$ на сопряжённое выражение $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$). Получим

$$\frac{8x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{x}.$$

Разделив на $\sqrt{x}$ (что возможно без потери корней, так как $x=0$ не есть корень), получим $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=8\sqrt{x}$. Вычитая это уравнение из полученного выше $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\frac{1}{4}\sqrt{x}$, находим

$$2\sqrt{a-x}=-\frac{31}{4}\sqrt{x}.$$

Но это равенство невозможно, так как левая часть есть положительное число, а правая — отрицательное. Если бы, не обратив на это внимания, мы возвели обе части в квадрат, то получили бы лишний корень $x=\frac{64}{1025}a$.

Отв. Если a положительно, то $x=-a$; если a — отрицательно, то уравнение не имеет решения.

203. Здесь с успехом можно применить перевод иррациональности в знаменатель (см. предыдущую задачу).

Отв. $x=0$.

204. *Отв.* $x_1 = a$; $x_2 = -b$.

205. *Отв.* $x = \frac{(a-1)^2}{4}$ (при $a \geqslant 1$).

При $a < 1$ уравнение не имеет решений.

206. Данное уравнение можно представить в виде

$$\frac{(\sqrt{a+x})^3}{ax} = \sqrt{x}$$

или

$$(a+x)^{\frac{3}{2}} = ax^{\frac{3}{2}}.$$

Возводим в степень $\frac{2}{3}$. Получаем $a + x = a^{\frac{2}{3}}x$. Отсюда $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$. Проверка:

$$a+x = \frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 1}; \quad (a+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{(a+x)^{\frac{3}{2}}}{ax} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Отв. $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$; если значение a лежит между -1 и $+1$, то уравнение не имеет решений.

207. Полагаем $\sqrt[4]{x} = z$. Тогда

$$\sqrt{x} = (\sqrt[4]{x})^2 = z^2.$$

Уравнение примет вид

$$z^2 + z - 12 = 0.$$

Отсюда $z_1 = 3$, $z_2 = -4$. Так как $\sqrt[4]{x}$ должен быть положительным числом, то второй корень лишний.

Отв. $x = 81$.

208. Полагаем $(x-1)^{\frac{1}{4}} = z$. Дальше решается, как предыдущая задача.

Отв. $x = 17$.

209 [1]. Возводим обе части уравнения в куб. Получим

$$\sqrt{10+2x}+\sqrt{15-2x}=7.$$

Здесь можно уединить один из радикалов, а можно и не уединять.

Отв. $x_1=3$; $x_2=-\frac{1}{2}$.

210. Возведём обе части уравнения в куб, применив формулу $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$. Получим

$$x+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\,[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}]+2x-3=12(x-1).$$

Выражение в квадратных скобках в силу заданного уравнения можно заменить выражением $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Получаем

$$\sqrt[3]{x(2x-3)\cdot 12(x-1)}=3(x-1).$$

Возводим в куб. Перенося члены в одну сторону, найдём

$$(x-1)[12x(2x-3)-27(x-1)^2]=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$x-1=0 \quad \text{и} \quad 12x(2x-3)-27(x-1)^2=0.$$

Найденные корни проверяем.

Отв. $x_1=1$, $x_2=3$.

211. Задача решается, как предыдущая.

Отв. $x_1=a$; $x_2=b$; $x_3=\frac{a+b}{2}$.

212. Полагаем $\sqrt[3]{x}=z$; тогда $\sqrt[3]{x^2}=z^2$. Подставив в исходное уравнение, получаем $2z^2+z-3=0$, откуда $z_1=1$; $z_2=-\frac{3}{2}$.

Отв. $x_1=1$; $x_2=-\frac{27}{8}$.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем корни кубические и вообще корни нечётных степеней мы не считаем арифметическими, допуская, что подкоренное число может быть и отрицательным (но обязательно действительным). Значение корня мы также считаем действительным числом.

213. Решается, как предыдущая задача.

Отв. $z_1 = 64$; $z_2 = -\frac{125}{8}$.

214. Полагаем $\sqrt[6]{a+x} = z$; тогда $\sqrt{a+x} = z^3$ и $\sqrt[3]{a+x} = z^2$.

Отв. $x_1 = -a$; $x_2 = 1 - a$.

215. Полагаем $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = z$; тогда $\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{1}{z}$ и уравнение после ряда преобразований примет вид

$$12z^2 - 7z - 12 = 0;$$

отсюда

$$z_1 = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad z_2 = -\frac{3}{4}.$$

Второе решение отбрасываем, как отрицательное (см. замечание 1 к задаче 181 на стр. 165). Для определения x получим уравнение $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = \frac{4}{3}$.

Отв. $x = 7$.

216. *Отв.* $x = \pm 5$.

217. Положим $\sqrt[3]{x} = z$; тогда $\sqrt[3]{x^2} = z^2$ и $x = z^3$. Получаем:

$$\frac{z^4 - 1}{z^2 - 1} - \frac{z^2 - 1}{z + 1} = 4.$$

Сокращаем первую дробь на $z^2 - 1$, вторую на $z + 1$. Получаем $z^2 - z - 2 = 0$. Но сокращение первой дроби законно только при условии, что $z^2 - 1 \neq 0$, а второй — только при условии, что $z + 1 \neq 0$. Между тем из двух корней $z_1 = 2$ и $z_2 = -1$ второй даёт $z + 1 = 0$. Он не годится, так как при $z = -1$ имеем $x = -1$, и левая часть данного уравнения теряет смысл.

Отв. $x = 8$.

218. Полагая $\sqrt{x} = z$, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{z^4 - 4}{z + 2} = z^2 - 8.$$

Сокращаем дробь на $z+2$ (см. объяснение к предыдущей задаче). Получаем $z^2-z-6=0$, откуда $z_1=3$; $z_2=-2$. Второй корень не годится, потому что, во-первых, выражение $\frac{z^2-4}{z+2}$ теряет смысл и, во-вторых, z не может быть отрицательным числом.

Отв. $x=9$.

219. Здесь введение вспомогательного неизвестного, которым мы пользовались в предыдущих задачах, не приводит к цели. Представляем уравнение в виде

$$\frac{(\sqrt{a-x})^3+(\sqrt{x-b})^3}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b.$$

Сокращаем дробь на $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}$ (сокращение законно, так как это число не может равняться нулю). После упрощений получаем $\sqrt{(a-x)(x-b)}=0$.

Отв. $x_1=a$; $x_2=b$.

220. Заданное уравнение представим в виде

$$\sqrt{2-x}\cdot\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

Это уравнение распадается на два: первое $\sqrt{2-x}=0$; его корень $x_1=2$; второе после освобождения от знаменателя будет $\sqrt{2(2-x)}=2-\sqrt{x}$. Его корни $x_2=0$; $x_3=\frac{16}{9}$.

Отв. $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=\frac{16}{9}$.

221. *Отв.* $x=81$.

222. Если, уединив радикал, возведём обе части полученного уравнения в квадрат, то получим уравнение 4-й степени. Но в данном случае можно применить искусственный приём. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5=12.$$

Полагая $\sqrt{x^2-3x+5}=z$, получаем $z^2+z-12=0$. Берём только положительный корень $z=3$.

Отв. $x_1=4$; $x_2=-1$.

223. Можно применить тот же приём, что в предыдущей задаче. Однако заранее можно сказать, что уравнение не имеет решений. Действительно, величина $3x^2+5x+1$ при всяком x больше, чем $3x^2+5x-8$. Поэтому

$$\sqrt{3x^2+5x+1} > \sqrt{3x^2+5x-8},$$

значит, левая часть данного уравнения при всяком x отрицательна и, следовательно, не может равняться единице.

Отв. Уравнение не имеет решений.

224. Обозначим через z одно из подкоренных выражений — удобнее всего положить $y^2+4y+6=z$. Уравнение примет вид

$$\sqrt{z+2}+\sqrt{z-2}=\sqrt{2z}.$$

Освобождаясь от радикалов, находим $z^2=4$. Годится только корень $z=2$ (при $z=-2$ два подкоренных выражения отрицательны). Решаем уравнение $y^2+4y+6=2$. Проверяем.

Отв. $y=-2$.

225 [1]. Можно решить по способу подстановки (из второго уравнения найти $y=6-x$ или $x=6-y$ и подставить в первое). Несколько быстрее ведёт к цели следующий искусственный приём. Первое уравнение преобразуется к виду $(x-y)^2=4$, откуда $x-y=2$ или $x-y=-2$. Получаем две системы:

$$1)\ \begin{cases} x-y=2, \\ x+y=6; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-y=-2, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Отв. 1) $x_1=4$, $y_1=2$;
2) $x_2=2$, $y_2=4$.

[1] В задаче 225 и в большинстве следующих задач этой главы применение искусственных приёмов совершенно необходимо для их успешного решения. Основная трудность этих задач в том, чтобы подметить особенности данной системы и подыскать соответствующий искусственный приём.

226. Предстзвим данную систему в виде

$$\begin{cases} xy+(x+y)=11, \\ xy(x+y)=30. \end{cases}$$

Положим для краткости $xy=z_1$; $x+y=z_2$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} z_1+z_2=11, \\ z_1z_2=30. \end{cases}$$

По теореме Виета z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения $z^2-11z+30=0$. Находим: $z_1=6$, $z_2=5$ или $z_1=5$, $z_2=6$. Получаем две системы:

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

К каждой можно снова применить теорему Виета (или решить по способу подстановки).

Отв. 1) $x=5$, $y=1$; 2) $x=1$, $y=5$;
3) $x=2$, $y=3$; 4) $x=3$, $y=2$.

227. Положим $y^2=z$; тогда имеем систему

$$\begin{cases} x+z=7, \\ xz=12. \end{cases}$$

Отв. 1) $x=4$, $y=\sqrt{3}$.
2) $x=4$, $y=-\sqrt{3}$.
3) $x=3$, $y=2$.
4) $x=3$, $y=-2$.

228. Положим $x^2=z_1$ и $-y=z_2$. Получим систему

$$\begin{cases} z_1+z_2=23, \\ z_1z_2=-50. \end{cases}$$

Отв. 1) $x=5$, $y=2$;
2) $x=-5$, $y=2$;
3) $x=i\sqrt{2}$, $y=-25$;
4) $x=-i\sqrt{2}$, $y=-25$.

229. Полагаем $-xy = z_1$; $x^2 - y^2 = z_2$. Получим систему

$$\begin{cases} z_1 z_2 = -180; \\ z_1 + z_2 = -11. \end{cases}$$

Находим $z_1 = 9$; $z_2 = -20$ или $z_1 = -20$; $z_2 = 9$. Теперь имеем две системы:

$$1) \begin{cases} xy = -9, \\ x^2 - y^2 = -20 \end{cases} \text{ и } 2) \begin{cases} xy = 20, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$$

Решим первую систему. Из первого её уравнения находим $y = -\frac{9}{x}$. Подставляем во второе. Находим биквадратное уравнение $x^4 + 20x^2 - 81 = 0$. Его корни

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-10 + \sqrt{181}} \approx \pm\sqrt{3,45} \approx \pm 1,86,$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{-10 - \sqrt{181}} \approx \pm\sqrt{-23,45} \approx \pm 4,84$$

Теперь находим

$$y_{1,2} = \frac{\mp 9}{\sqrt{-10 + \sqrt{181}}} \approx \frac{\mp 9}{1,86} \approx \mp 4,84,$$

$$y_{3,4} \approx \frac{\mp 9}{4,84i} \approx \pm 1,86i.$$

Тем же способом решаем вторую систему.

Отв. 1) $x \approx 1,86$, $y \approx -4,84$;
2) $x \approx -1,86$, $y \approx 4,84$;
3) $x \approx 4,84i$, $y \approx 1,86i$;
4) $x \approx -4,84i$, $y \approx -1,86i$;
5) $x = 5$, $y = 4$;
6) $x = -5$, $y = -4$;
7) $x = 4i$, $y = -5i$;
8) $x = -4i$, $y = 5i$.

230. Исключим свободные члены, для чего помножим второе уравнение на 7 и вычтем из первого. Получим

$$-32x^2 - 2xy + 75y^2 = 0.$$

Это — однородное уравнение второй степени (т. е. уравнение, содержащее только члены второй степени;

членов первой степени и свободного члена в нём нет). Разделив обе части уравнения на x^2 (это можно сделать, так как $x=0$ не есть корень), мы преобразуем его к виду $-32-2\frac{y}{x}+75\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$, и, решив квадратное уравнение, найдём $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ или $\frac{y}{x}=-\frac{16}{25}$. Этим способом из всякого однородного уравнения второй степени можно найти отношение $\frac{y}{x}$.

Теперь решаем две системы:

1) $\begin{cases} 5x^2-10y^2-5=0, \\ \frac{y}{x}=\frac{2}{3} \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} 5x^2-10y^2-5=0, \\ \frac{y}{x}=-\frac{16}{25} \end{cases}$

(по способу подстановки).

Отв. 1) $x=3, \quad y=2$; 3) $x=\frac{25}{\sqrt{113}}, \ y=-\frac{16}{\sqrt{113}}$;

2) $x=-3, \ y=-2$; 4) $x=-\frac{25}{\sqrt{113}}, \ y=\frac{16}{\sqrt{113}}$.

231. 1-е уравнение запишем так: $x^2-2xy+y^2=\frac{1}{2}xy$. Тогда имеем $(x-y)^2=\frac{1}{2}xy$. 2-е уравнение запишем в виде $2(x-y)=\frac{1}{2}xy$. Значит, $(x-y)^2-2(x-y)=0$.

Отсюда находим $x-y=0$ и $x-y=2$. Получаем две системы:

1) $\begin{cases} x-y=0, \\ xy=0 \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=8. \end{cases}$

Отв. 1) $x=y=0$; 2) $x=4, \ y=2$; 3) $x=-2, \ y=-4$.

232. Первое уравнение перепишем так:

$$(x^2+2xy+y^2)=13+xy \text{ или } (x+y)^2-13=xy.$$

Из второго уравнения $x+y=4$; подставив, получим $16-13=xy$. Решаем теперь систему

$$\begin{cases} xy=3, \\ x+y=4. \end{cases}$$

Отв. 1) $x=3, \ y=1$; 2) $x=1, \ y=3$.

233. Решается, как предыдущая задача. Получим новую систему

$$\begin{cases} xy = 6, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Отв. 1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -2$, $y = -3$.

234. Полагаем $\frac{x}{y} = z$; тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$, и первое уравнение примет вид $z + \frac{1}{z} = \frac{25}{12}$ или $12z^2 - 25z + 12 = 0$. Его корни $z_1 = \frac{4}{3}$ и $z_2 = \frac{3}{4}$. Теперь имеем две системы:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{3}, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4}, \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Системы решаются подстановкой значения x из первого уравнения во второе.

Отв. 1) $x = 4$, $y = 3$;
2) $x = -4$, $y = -3$;
3) $x = 3i$, $y = 4i$;
4) $x = -3i$, $y = -4i$.

235. Систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x^m y^n = ca^m b^n, \\ x^n y^m = da^m b^n. \end{cases}$$

Перемножаем эти уравнения и делим одно на другое. Получаем $(xy)^{m+n} = cda^{2m}b^{2n}$ и $\left(\frac{x}{y}\right)^{m-n} = \frac{c}{d}$; отсюда

$$xy = (cd)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{2m}{m+n}} b^{\frac{2n}{m+n}} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Перемножая эти уравнения, находим

$$x^2 = c^{\frac{2m}{m^2-n^2}} d^{\frac{2n}{n^2-m^2}} a^{\frac{2m}{m+n}} b^{\frac{2n}{m+n}}.$$

Выражение для y^2 можно найти аналогично, взяв уравнение $\left(\frac{y}{x}\right)^{m-n}=\frac{d}{c}$. Оно отличается от соответствующего уравнения для x только перестановкой букв c и d.

Отв. $x=c^{\frac{m}{m^2-n^2}}d^{\frac{n}{n^2-m^2}}a^{\frac{m}{m+n}}b^{\frac{n}{m+n}}$,

$y=c^{\frac{n}{n^2-m^2}}d^{\frac{m}{m^2-n^2}}a^{\frac{m}{m+n}}b^{\frac{n}{m+n}}$.

236. Во втором уравнении разлагаем x^3+y^3 на множители $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ и делим второе уравнение на первое. Получим $x+y=5$. В первом уравнении прибавляем к правой и левой частям уравнения по $3xy$; получим $(x+y)^2=7+3xy$. Подставив 5 вместо $(x+y)$ согласно полученному уравнению, найдём $xy=6$. Теперь решаем систему

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Отв. 1) $x=3$, $y=2$;
2) $x=2$, $y=3$.

237. Помножим второе уравнение на 3 и сложим с первым. Получим $(x+y)^3=1$. Если ограничиться действительными решениями, то отсюда $x+y=1$. Заменяя во втором уравнении $x+y$ через 1, имеем $xy=-2$. Решаем систему

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2. \end{cases}$$

Отв. 1) $x=2$, $y=-1$;
2) $x=-1$, $y=2$.

238. Решается, как предыдущая задача.

Отв. 1) $x=3$, $y=2$;
2) $x=2$, $y=3$.

239. Полагаем $\frac{x+y}{x-y}=z$. Первое уравнение принимает вид $z+\frac{1}{z}=5\frac{1}{5}$. Отсюда $z=5$ и $z=\frac{1}{5}$, т. е.

$$\frac{x+y}{x-y}=5 \text{ и } \frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{5}.$$

Из уравнения $\frac{x+y}{x-y}=5$ находим $y=\frac{2}{3}x$. Решаем это уравнение совместно с заданным уравнением $xy=6$. Таким же образом используем уравнение $\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{5}$.

Отв. 1) $x=3, \quad y=2$;
2) $x=-3, \quad y=-2$;
3) $x=3i, \quad y=-2i$;
4) $x=-3i; \quad y=2i$.

240. Исключаем из системы неизвестное z: второе уравнение вычитаем из первого, умноженного на c, третье уравнение вычитаем из второго, умноженного на c. Получим систему

$$\begin{cases} (c-a)x+(c-b)y=(c-d), \\ a(c-a)x+b(c-b)y=d(c-d). \end{cases}$$

Отсюда находим x и y. Аналогично находим z.

Отв. $x=\frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}$; $y=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}$;

$$z=\frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)}.$$

241. Исключим сначала u; для этого: 1) второе уравнение умножим на 2 и прибавим к первому; 2) третье уравнение умножим на (-2) и прибавим ко второму; 3) третье уравнение умножим на (-3) и прибавим к четвёртому. Получим систему

$$\begin{cases} 5x-4y+13z=36, \\ -4x-11y+9z=1, \\ -5x-13y+12z=5. \end{cases}$$

Из этой системы исключим x, предварительно вычитая из второго уравнения третье. Получим

а) $5x-4y+13z=36$;

б) $x+2y-3z=-4$;

в) $-5x-13y+12z=5$.

Складываем уравнения а) и в), а уравнение б) умножаем на 5 и складываем с в). Получим

$$\begin{cases} -17y+25z=41, \\ -3y-3z=-15 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -17y+25z=41, \\ y+z=5. \end{cases}$$

Отсюда находим $z=3$ и $y=2$. Из уравнения б) находим x и из третьего заданного уравнения находим u.

Отв. $x=1$; $y=2$; $z=3$; $u=4$.

242. Вычитаем из второго уравнения первое. Получим $y+2z=1$. Отсюда $y=1-2z$. Подставляем это значение y в первое уравнение, находим $x=z+3$. Подставляем найденные значения x и y в третье уравнение, получим $3z^2+z-2=0$. Корни его $z_1=\frac{2}{3}$ и $z_2=-1$. Подставляя значения z в уравнения $x=z+3$ и $y=1-2z$, найдём по два значения для x и y.

Отв. 1) $x=\frac{11}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=\frac{2}{3}$;

2) $x=2$, $y=3$, $z=-1$.

243. Первое уравнение возводим в квадрат, второе — в куб и третье — в квадрат после переноса второго члена в правую часть уравнения. Получим систему

$$\begin{cases} 4x+y-3z=-3, \\ 5x+2y+z=1{,}5, \\ 6x-y-z=0. \end{cases}$$

Отв. $x=\frac{9}{58}$, $y=-\frac{6}{29}$, $z=\frac{33}{29}$.

244. Возводим первое уравнение в квадрат и вычитаем второе. Получаем $xy+xz+yz=54$. В силу третьего уравнения можно заменить первые два слагаемых через $2yz$. Получаем $3yz=54$, т. е.

$$yz=18. \qquad \text{(а)}$$

Теперь третье уравнение можно записать в виде $xy+xz=2\cdot 18$, т. е.

$$x(y+z)=36. \qquad \text{(б)}$$

А так как первое уравнение имеет вид

$$x+(y+z)=13, \tag{в}$$

то из уравнений (б) и (в) можно найти x и $y+z$. Получаем:

$$\begin{cases} x=9, \\ y+z=4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=4, \\ y+z=9. \end{cases}$$

Чтобы найти y и z по отдельности, присоединим уравнение (а). Получим две системы:

$$1) \begin{cases} y+z=4, \\ yz=18 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} y+z=9, \\ yz=18. \end{cases}$$

Замечание. Прв возведении в квадрат первого уравнения возникает опасность появления лишних решений. Но если бы они появились, то удовлетворяли бы уравнению $x+y+z=-13$, что противоречило бы уравнению (в).

Отв. 1) $x=9$, $y=2+i\sqrt{14}$, $z=2-i\sqrt{14}$;
2) $x=9$, $y=2-i\sqrt{14}$, $z=2+i\sqrt{14}$;
3) $x=4$, $y=6$, $z=3$;
4) $x=4$, $y=3$, $z=6$.

245. Третье уравнение представим в виде

$$z^2-xz-yz+xy=2.$$

Сложив его со вторым, получим

$$z^2+2xy=49. \tag{а}$$

Отсюда $z^2=49-2xy$. Подставляем это выражение в первое уравнение. Получим $(x+y)^2=49$, т. е. $x+y=\pm 7$. Положим сначала $x+y=7$.

Представим второе уравнение в виде

$$xy+z(x+y)=47$$

и сюда подставим выражение $xy=\frac{49-z^2}{2}$, получаемое из (а), и значение $x+y=7$. Получаем $z^2-14z+45=0$. Отсюда $z_1=5$ и $z_2=9$. Если $z=5$, то $xy=\frac{49-z^2}{2}=12$; если же $z=9$, то $xy=\frac{49-z^2}{2}=-16$. Имеем две системы:

$$1) \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x+y=7, \\ xy=-16, \end{cases}$$

каждая из которых имеет по два решения. Всего получаем четыре решения:

1) $x=3,\ y=4,\ z=5;$

2) $x=4,\ y=3,\ z=5;$

3) $x=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\quad y=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\ z=9;$

4) $x=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\quad y=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\ z=9.$

Теперь положим $x+y=-7$ и тем же способом найдём ещё четыре решения.

Отв.

1) $x=3,\ y=4,\ z=5;$

2) $x=4,\ y=3,\ z=5;$

3) $x=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\ z=9;$

4) $x=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\ z=9;$

5) $x=-3,\ y=-4,\ z=-5;$

6) $x=-4,\ y=-3,\ z=-5;$

7) $x=\frac{-7+\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},\ z=-9;$

8) $x=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{-7+\sqrt{113}}{2},\ z=-9.$

246. Вычитаем сначала второе, а затем третье уравнение из первого. Получаем:

$$(a^3-b^3)+(a^2-b^2)\,x+(a-b)\,y=0, \qquad \text{(а)}$$

$$(a^3-c^3)+(a^2-c^2)\,x+(a-c)\,y=0. \qquad \text{(б)}$$

Сокращаем уравнение (а) на $(a-b)$ и уравнение (б) на $(a-c)$. Имеем:

$$(a^2+ab+b^2)+(a+b)\,x+y=0, \qquad \text{(в)}$$

$$(a^2+ac+c^2)+(a+c)\,x+y=0. \qquad \text{(г)}$$

Вычитаем (г) из (б). Получаем

$$(ab-ac+b^2-c^2)+(b-c)\,x=0.$$

Отсюда

$$x=-\frac{ab-ac+b^2-c^2}{b-c}=-(a+b+c).$$

Неизвестное y находим из (в) или из (г). Теперь по любому из данных уравнений найдём z.

Отв. $x=-(a+b+c)$,
$y=ab+bc+ca$,
$z=-abc$.

247. Положим $\frac{1}{\sqrt{x-1}}=u$; $\frac{1}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=v$. Получаем систему

$$\begin{cases}12u+5v=5,\\ 8u+10v=6.\end{cases}$$

Её корни

$$u=\frac{1}{4};\quad v=\frac{2}{5},\ \text{т. е.}\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{4};\ \frac{1}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=\frac{2}{5}.$$

Отсюда находим $x=17$; $y=6$.

Отв. $x=17$, $y=6$.

248. В силу второго уравнения первое можно записать так: $10-2\sqrt{xy}=4$. Отсюда $xy=9$. Получаем систему

$$\begin{cases}x+y=10,\\ xy=9.\end{cases}$$

Отв. 1) $x=9$, $y=1$; 2) $x=1$, $y=9$.

249. Полагаем $\sqrt{\frac{3x}{x+y}}=z$. Первое уравнение примет вид $z-2+\frac{1}{z}=0$. Отсюда $z=1$, т. е. $\sqrt{\frac{3x}{x+y}}=1$. Из последующего уравнения находим $y=2x$ и подставляем во второе уравнение.

Отв. 1) $x=6$, $y=12$; 2) $x=-4{,}5$, $y=-9$.

250. Первое уравнение приводится к виду $\sqrt{x^2+y^2}=$ $=2\sqrt[3]{17}$, откуда

$$x^2+y^2=136. \qquad \text{(а)}$$

Второе уравнение возводим в квадрат; получим $\sqrt{x^2-y^2}=$ $=18-x$, откуда

$$y^2=36x-324. \qquad \text{(б)}$$

Это выражение подставляем в (а). Получаем x^2+36x- $-460=0$. Отсюда находим $x=10$ и $x=-46$. Подставляя в (б), находим y. Получаем четыре пары решений:

1) $x=10,\ y=6$; 3) $x=-46,\ y=6\sqrt{55}i$;

2) $x=10,\ y=-6$; 4) $x=-46,\ y=-6\sqrt{55}i$.

Третья и четвёртая пары решений не годятся, так как выражения $\sqrt{x+y}$ и $\sqrt{x-y}$, где радикалы должны означать арифметические значения корня (в противном случае они неопределённы ввиду двузначности корня), не имеют смысла при комплексных значениях $x+y$ и $x-y$. Первую и вторую пару решений следует проверить.

Отв. 1) $x=10,\ y=6$; 2) $x=10,\ y=-6$.

251. Система имеет смысл только при $a>0$ (см. предыдущее объяснение). Первое уравнение возводим в квадрат:

$$\sqrt{x^2-y^2}=8a-x. \qquad \text{(а)}$$

Это выражение подставляем во второе уравнение; получаем

$$\sqrt{x^2+y^2}=(\sqrt{41}+5)\,a-x. \qquad \text{(б)}$$

Возводим в квадрат уравнения (а) и (б):

$$y^2=-64a^2+16ax, \qquad \text{(а')}$$

$$y^2=(\sqrt{41}+5)^2a^2-2\,(\sqrt{41}+5)\,ax. \qquad \text{(б')}$$

Исключая y из (а') и (б'), получаем

$$(130+10\sqrt{41})\,a^2=(26+2\sqrt{41})\,ax,$$

откуда $x=5a$. Из (a') находим $y=\pm 4a$ и затем производим проверку.

Отв. 1) $x=5a,\ y=4a$; 2) $x=5a,\ y=-4a$.

252. Возводим первое уравнение в квадрат; $2x^2 - 2\sqrt{x^4 - y^4} = y^2$. Подставляем сюда значение $x^4 - y^4 = 144a^4$ из второго уравнения. Получаем

$$y^2 = 2x^2 - 24a^2. \qquad \text{(a)}$$

Отсюда находим y^4 и подставляем во второе заданное уравнение. Получаем

$$x^4 - 32a^2x^2 + 240a^4 = 0.$$

Отсюда $x = \pm\sqrt{20}\,a$ и $x = \pm\sqrt{12}\,a$. Из уравнения (а) находим y. Для каждого из значений $x = \pm\sqrt{20}\,a$ имеем $y = \pm 4a$, а для каждого из значений $x = \pm\sqrt{12}\,a$ имеем $y = 0$. Проверка показывает, что из полученных шести пар решений одни являются лишними при $a > 0$, другие же являются лишними при $a < 0$. Возьмём, например, пару решений $x = \sqrt{20}\,a$, $y = 4a$. Подставляя в первое уравнение, мы находим $\sqrt{36a^2} - \sqrt{4a^2} = 4a$, т. е. $6|a| - 2|a| = 4a$. Это равенство является тождеством при $a \geqslant 0$, но оно не верно при $a < 0$.

Отв. При $a \geqslant 0$ решения будут:

1) $x = \sqrt{20}\,a$, $y = 4a$; 2) $x = -\sqrt{20}\,a$, $y = 4a$;

3) $x = \sqrt{12}\,a$, $y = 0$; 4) $x = -\sqrt{12}\,a$, $y = 0$.

При $a < 0$ решения будут:

5) $x = \sqrt{20}\,a$, $y = -4a$; 6) $x = -\sqrt{20}\,a$, $y = -4a$.

253. Первый способ. Из второго уравнения находим $x + y = 14 - \sqrt{xy}$. Возводим в квадрат; получаем

$$x^2 + y^2 + 2xy = 196 + xy - 28\sqrt{xy},$$

откуда

$$x^2 + y^2 + xy = 196 - 28\sqrt{xy}.$$

В силу первого уравнения имеем $84 = 196 - 28\sqrt{xy}$. Отсюда находим $\sqrt{xy} = 4$, т. е. $xy = 16$. Подставляя во второе уравнение значение $\sqrt{xy} = 4$, находим $x + y = 10$. Решаем систему

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 16. \end{cases}$$

Второй способ. Левую часть первого уравнения разлагаем на множители:

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-(\sqrt{xy})^2=$$
$$=(x+y+\sqrt{xy})(x+y-\sqrt{xy})=84.$$

Отсюда в силу второго уравнения получаем

$$14(x+y-\sqrt{xy})=84,$$

т. е. $x+y-\sqrt{xy}=6$. Из системы

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=6, \\ x+y+\sqrt{xy}=14 \end{cases}$$

можно найти $x+y$ и $\sqrt{xy}$.

Отв. 1) $x=2,\ y=8$;
2) $x=8,\ y=2$.

253а. Из первого уравнения находим $y=\frac{x-m}{1+mx}$, из второго $y=-\frac{2+x}{1+x}$; приравняв эти два выражения, получаем $\frac{x-m}{1+mx}=-\frac{2+x}{1+x}$; отсюда имеем уравнение

$$(1+m)x^2+(2+m)x+(2-m)=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни при условии

$$(2+m)^2-4(1+m)(2-m)\geqslant 0.$$

После упрощения левой части получим $5m^2-4\geqslant 0$, откуда $|m|\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$. При этом условии x имеет действительные значения, значит, действительные значения имеет и $y=-\frac{2+x}{1+x}$.

Отв. $|m|\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$.

ГЛАВА 4

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предварительные замечания

На вступительных экзаменах нередко предлагается решить уразнение, содержащее логарифмы по различным основаниям (см., например, задачи **267, 268, 309—313**). Для их решения может оказаться удобным привести все логарифмы к одному основанию. Но соответствующие формулы не даются в средней школе. Поэтому мы приведём их с необходимыми пояснениями.

1. Формула

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad \text{(а)}$$

позволяет поменять ролями основание логарифма и число.

Пример.

$$\log_8 2 = \frac{1}{\log_2 8} = \frac{1}{3}.$$

Пояснение. По определению логарифма $\log_2 8$ есть показатель степени, в которую надо возвести 2, чтобы получить 8. Таким образом, запись $\log_2 8 = 3$ есть лишь иная форма записи $2^3 = 8$. Но последнее равенство можно записать ещё так: $\sqrt[3]{8} = 2$, т. е. $8^{\frac{1}{3}} = 2$. Стало быть, $\log_8 2 = \frac{1}{3}$.

Вообще равенство $a^x = b$ можно записать ещё так: $b^{\frac{1}{x}} = a$. Первое равенство означает, что $\log_a b = x$, а второе, — что $\log_b a = \frac{1}{x}$, откуда и следует формула (а).

2. Формула (а) есть частный случай более общей формулы

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}, \qquad \text{(б)}$$

выражающей следующий важный факт: зная логарифмы различных чисел по основанию b, можно найти логарифмы тех же чисел по основанию a; для этого достаточно выполнить деление на $\log_b a$ (т. е. на логарифм нового основания по ста-

рому). Вместо деления на $\log_b a$ можно [в силу (а)] выполнить умножение на $\log_a b$:

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N. \qquad \text{(в)}$$

Множитель $\log_a b$ называется *модулем перехода* (от системы логарифмов с основанием b к системе с основанием a).

Пример. Имея таблицу десятичных логарифмов, можно составить таблицу логарифмов по основанию 2. Для этого достаточно выполнить деление на $\lg 2 = 0{,}3010$ или умножение на $\log_2 10 = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}322$. Так,

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0{,}4771}{0{,}3010} = 1{,}585.$$

Пояснение. По определению логарифма имеем $2^{\log_2 3} = 3$. Прологарифмируем это равенство по основанию 10. Получаем $\log_2 3 \cdot \lg 2 = \lg 3$, откуда $\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2}$. Таким же образом из тождества $a^{\log_a N} = N$, логарифмируя по основанию b, получим формулу (б).

Чтобы не спутаться в обозначениях, полезно для проверки применить следующий приём: вместо выражения $\log_a b$ напишем дробь $\frac{b}{a}$ (разумеется, эти выражения не равны между собой); аналогично поступим с выражениями $\log_b a$, $\log_a N$ и т. д. Тогда вместо формул (а), (б), (в) получим другие, но тоже верные, формулы. Так, вместо (в) получим

$$\frac{N}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{N}{b}.$$

254. Первый способ.

$$x = 10 \cdot 10^{2\left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right)} = 10 \cdot 10^{\lg 9 - 2\lg 2} = 10 \cdot 10^{\lg \frac{9}{4}}.$$

Согласно определению логарифма $10^{\lg \frac{9}{4}} = \frac{9}{4}$, поэтому $x = 10 \cdot \frac{9}{4} = 22{,}5$.

Отв. $x = 22{,}5$.

Второй способ. Логарифмируя, будем иметь

$$\lg x = \lg 10 + \left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right)\lg 100,$$

или

$$\lg x = \lg 10 + \lg 9 - 2\lg 2 = \lg\frac{10\cdot 9}{2^2}.$$

Отв. $x = 22{,}5$.

255. Как в задаче **254**, будем иметь

$$\lg x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lg 4\right)\lg 100;$$

$$\lg x = 1 - \frac{1}{2}\lg 4 = \lg\frac{10}{\sqrt{4}}; \quad x = \frac{10}{\sqrt{4}}.$$

Отв. $x = 5$.

256. Поступая, как в предыдущих задачах, будем иметь

$$\lg x = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\lg 16\right)\lg 10 = 1 + \frac{1}{4}\lg 16 = \lg\left(10\sqrt[4]{16}\right);$$

$$x = 10\sqrt[4]{16}.$$

Отв. $x = 20$.

257. Обозначим $y = 49^{1-\log_7 2}$, а $z = 5^{-\log_5 4}$; тогда

$$x = y + z.$$

Как прежде, находим, что $\log_7 y = (1 - \log_7 2)\log_7 49$, или

$$\log_7 y = (\log_7 7 - \log_7 2)\,2 = 2\log_7\frac{7}{2} = \log_7\frac{49}{4},$$

откуда $y = \frac{49}{4}$; аналогично найдём, что $z = \frac{1}{4}$. Следовательно, $x = \frac{25}{2}$.

Отв. $x = \frac{25}{2}$.

258. Имеем $\log_4\log_3\log_2 x = \log_4 1$, откуда $\log_3\log_2 x = 1$; $\log_2 x = 3$.

Отв. $x = 8$.

259. Аналогично решению предыдущей задачи имеем

$$1+\log_b[1+\log_c(1+\log_p x)]=1;$$
$$\log_b[1+\log_c(1+\log_p x)]=0;$$

далее

$$1+\log_c(1+\log_p x)=1;\ \log_c(1+\log_p x)=0;$$
$$1+\log_p x=1,\ \log_p x=0;\ x=1.$$

Отв. $x=1$.

260. Выражение в фигурных скобках должно быть положительным числом, так как отрицательное число не имеет (действительного) логарифма при основании 4. Поэтому, переписав данное уравнение в виде

$$2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4},$$

мы должны взять только положительное значение $\sqrt{4}$, т. е. 2. Применяя аналогичные преобразования повторно, получим далее

$$\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]=1,\quad 1+\log_2(1+3\log_2 x)=3,$$
$$\log_2(1+3\log_2 x)=2;$$

следовательно, $1+3\log_2 x=4$, $\log_2 x=1$.

Отв. $x=2$.

261. Данное уравнение представим в виде

$$\log_2(x+14)(x+2)=6,\quad \text{или}\quad (x+14)(x+2)=2^6=64,$$

откуда имеем $x^2+16x-36=0$, $x_1=2$, $x_2=-18$. Второй корень не годится, так как в левую часть входят выражения $\log_2(x+14)$ и $\log_2(x+2)$, которые при отрицательном x не имеют действительного значения.

Отв. $x=2$.

262. Представим данное уравнение в виде

$$\log_a[y(y+5)\cdot 0{,}02]=0;$$

отсюда

$$y(y+5)\cdot 0{,}02=1\ \text{ или }\ y^2+5y-50=0;$$

получим два корня $y_1=5$, $y_2=-10$. Второй корень не годится (см. предыдущее решение).

Отв. $y=5$.

263. Имеем

$$\lg(35-x^3)=3\lg(5-x) \text{ или } \lg(35-x^3)=\lg(5-x)^3;$$

следовательно,

$$35-x^3=(5-x)^3 \text{ или } x^2-5x+6=0.$$

Отв. $x_1=2$, $x_2=3$.

264. Преобразуя выражение в квадратных скобках, получим

$$b-\frac{(3a-b)(a^2+ab)^{-1}}{b^{-2}}=\frac{b(a-b)^2}{a(a+b)}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид

$$1+\lg x=\frac{1}{3}\lg\frac{b(a-b)^2}{a(a+b)}-\frac{4}{3}\lg b+\frac{1}{3}\lg[a(a+b)(a-b)].$$

Применяя в правой части теорему о логарифме произведения (и дроби), получим

$$1+\lg x=\lg(a-b)-\lg b.$$

Заменяя единицу через $\lg 10$, перепишем уравнение в виде

$$\lg 10+\lg x=\lg(a-b)-\lg b, \text{ или } \lg(10x)=\lg\frac{a-b}{b};$$

отсюда $10x=\frac{a-b}{b}$.

Отв. $x=\frac{a-b}{10b}$.

265. Данное уравнение можно представить в виде

$$\lg\left(x-\frac{a}{\sqrt{1-a}}\right)=\lg\sqrt{1+\frac{1}{a}}+\lg\sqrt{\frac{a(1-a)}{1+a}};$$

потенцируя, находим

$$x-\frac{a}{\sqrt{1-a}}=\sqrt{1+\frac{1}{a}}\sqrt{\frac{a(1-a)}{1+a}}$$

или

$$x-\frac{a}{\sqrt{1-a}}=\sqrt{1-a},$$

откуда

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-a}}.$$

Отв. $x=\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

266. Данное уравнение можно иначе записать так:

$$\frac{1}{2}\log_x 5+\log_x 5+\log_x x-2,25=\left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2;$$

так как $\log_x x=1$, то после упрощений получим

$$\log_x^2 5-6\log_x 5+5=0.$$

Решая квадратное уравнение (с неизвестным $\log_x 5$), находим два корня: $\log_x 5=5$ и $\log_x 5=1$.

Отв. $x_1=\sqrt[5]{5}$; $x_2=5$.

267. Первый способ. Положив $\log_{16} x=z$, имеем $x=16^z$, отсюда

$$\log_4 x=z\log_4 16=2z \quad \text{и} \quad \log_2 x=z\log_2 16=4z.$$

Данное уравнение примет вид $z+2z+4z=7$, т. е. $z=1$.

Второй способ. Приведём все логарифмы к основанию 2. По формуле (б) (стр. 192) находим: $\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=$ $=\frac{\log_2 x}{2}$, аналогично $\log_{16} x=\frac{\log_2 x}{4}$. Получаем уравнение

$$\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7, \text{ откуда } \log_2 x=4.$$

Отв. $x=16$.

268. Решается, как предыдущая.
Отв. $x=a$.

269. Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{3-7x},$$

откуда $3x-7=3-7x$.
Отв. $x=1$.

270. Представим заданное уравнение в виде

$$7\cdot 3^{x+1}-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}.$$

Вынося за скобку 3^x и 5^x, будем иметь

$$3^x(7\cdot 3-3^4)=5^x(5^2-5^3), \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{5}{3},$$

откуда $x=-1$.
Отв. $x=-1$.

271. Перепишем заданное уравнение в виде

$$2^{-3}\cdot 2^{4x-6}=\frac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{-3x}},\quad \text{или}\quad 2^{4x-9}=2^{\frac{5}{2}x}.$$

Отсюда имеем

$$4x-9=\frac{5}{2}x.$$

Отв. $x=6$.

272. Заданное уравнение можно записать так:

$$2^{-x^2}\cdot 2^{2x+2}=2^{-6},\quad \text{или}\quad 2^{-x^2+2x+2}=2^{-6}.$$

Следовательно, $-x^2+2x+2=-6$.

Отв. $x_1=4$; $x_2=-2$.

273. Представим заданное уравнение в виде

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}}=2^{-2}\cdot 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}};$$

отсюда имеем

$$\frac{5(x+5)}{x-7}=-2+\frac{7(x+17)}{x-3}.$$

Отв. $x=10$.

274. Так как $\frac{\lg 4}{\lg 8}=\frac{2\lg 2}{3\lg 2}=\frac{2}{3}$, то заданное уравнение можно переписать так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left(\frac{2}{3}\right)^{(1-x)3}=\frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$2x+3(1-x)=1.$$

Отв. $x=2$.

275. Представим заданное уравнение в виде

$$2^{\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}\right)\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=2^2;$$

приравнивая показатели, находим

$$\frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)}=2,\quad \text{или}\quad 2x-5\sqrt{x}-3=0.$$

Введём обозначение $\sqrt{x}=z$; тогда будем иметь

$$2z^2-5z-3=0, \text{ откуда } z_1=3, \quad z_2=-\frac{1}{2}.$$

Но второй корень не годится, так как величина z (она представляет арифметическое значение корня $\sqrt{x}$) должна быть положительной. Итак, имеем $z=\sqrt{x}$. Отсюда $x=9$.

Отв. $x=9$.

276. Заданное уравнение можно представить в виде

$$2^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}}=2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}}.$$

Следовательно,

$$1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{x}-1},$$

откуда имеем $3x-8\sqrt{x}-3=0$. Обозначив $\sqrt{x}=z$, будем иметь $3z^2-8z-3=0$; $z_1=3$; $z_2=-\frac{1}{3}$; второй корень $z_2=-\frac{1}{3}$ не годится (см. решение задачи **275**). Следовательно, $x=9$.

Отв. $x=9$.

277. Данное уравнение можно записать так:

$$a^{\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}}=a^0.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}=0.$$

После упрощений получаем $x^2-2x-15=0$.

Отв. $x_1=5$; $x_2=-3$.

278*. Пользуясь формулой (a) (стр. 192), получим

$$\frac{3}{\log_x x+2\log_x a}+\frac{1}{2\left(\log_x x-\frac{1}{2}\log_x a\right)}=2,$$

или

$$\frac{3}{1+2\log_x a}+\frac{1}{2-\log_x a}=2.$$

Решаем относительно $\log_x a$ и получаем

$$\log_x a = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}.$$

Отв. $x_1 = a$; $x_2 = a^{\frac{4}{3}}$.

279. По формуле (б) (стр. 192) найдём

$$\log_x 2 = \frac{\log_4 2}{\log_4 x} = \frac{1}{2\log_4 x}.$$

Тогда данное уравнение примет вид $\log_4(x+12) = 2\log_4 x$, откуда $x+12 = x^2$. Берём только положительный корень $x = 4$; при отрицательном x выражение $\log_x 2$ не имеет действительного значения.

Отв. $x = 4$.

280*. Данное уравнение запишем так:

$$(\log_x 5 + 2)\log_5^2 x = 1.$$

Так как $\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$, то получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2\right)\log_5^2 x = 1.$$

Решив его относительно $\log_5 x$, найдём

$$(\log_5 x)_1 = \frac{1}{2} \text{ и } (\log_5 x)_2 = -1.$$

Отв. $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = \frac{1}{5}$.

281. Левая часть уравнения есть сумма $x+1$ членов геометрической прогрессии, а потому (в случае $a \neq 1$) имеем

$$\frac{1-a^{x+1}}{1-a} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8),$$

или

$$1-a^{x+1} = (1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8),$$

или

$$1-a^{x+1} = 1-a^{16},$$

откуда $a^{x+1} = a^{16}$; $x+1 = 16$; $x = 15$. При $a = 1$ общая формула суммы членов геометрической прогрессии неприме-

нима. В этом случае левая часть данного уравнения есть сумма $x+1$ слагаемых, каждое из которых равно 1, так что уравнение принимает вид $x+1=16$, и мы снова имеем $x=15$.

Отв. $x=15$.

282. Данное уравнение перепишем в виде

$$5^{2+4+6+\ldots+2x}=5^{56},$$

откуда

$$2+4+6+\ldots+2x=56, \text{ или } 1+2+3+\ldots+x=28.$$

Левая часть уравнения есть сумма членов арифметической прогрессии. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{(1+x)\,x}{2}=28,$$

откуда $x_1=7$, $x_2=-8$. Второй корень не годится, так как по смыслу задачи число x должно быть целым положительным.

Отв. $x=7$.

283. Заданное уравнение перепишем в виде

$$2^{2x}2^{-4}-17\cdot 2^{x}2^{-4}+1=0.$$

Обозначая $2^x=z$, получим

$$z^2-17z+16=0; \quad z_1=16; \quad z_2=1,$$

откуда $x_1=4$; $x_2=0$.

Отв. $x_1=4$; $x_2=0$.

284. Аналогично предыдущей задаче, полагая $4^x=z$, будем иметь $2z^2-17z+8=0$.

Отв. $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-\frac{1}{2}$.

285. Полагая $9^{\frac{1}{x}}=z$, получим уравнение

$$3z^2-10z+3=0.$$

Отв. $x_1=2$; $x_2=-2$.

286. Логарифмируя данное уравнение (по основанию 10), получаем

$$\frac{\lg x+7}{4}\lg x=\lg x+1, \quad \text{или} \quad \lg^2 x+3\lg x-4=0,$$

откуда $\lg x_1=1$; $\lg x_2=-4$.

Отв. $x_1=10$, $x_2=0{,}0001$.

287. Преобразуем данное уравнение так, чтобы каждая его часть представляла логарифм некоторого выражения. Для этого вместо 1 в левой части уравнения напишем $\lg 10$. Теперь данное уравнение можно записать в виде

$$\lg\frac{4^{-1}2^{\sqrt{x}}-1}{10}=\lg\frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2}{2^2}.$$

Из равенства логарифмов следует равенство чисел, т. е.

$$\frac{4^{-1}2^{\sqrt{x}}-1}{10}=\frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2}{4}.$$

После упрощений получаем уравнение

$$2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}-24=0.$$

Так как $2^{\sqrt{x}}=\left(2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$, то, введя обозначение $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}=z$, мы будем иметь $z^2-5z-24=0$.

Корни этого уравнения $z_1=8$ и $z_2=-3$. Взяв $z_1=8$, получаем уравнение $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}=8$, из которого находим $\frac{\sqrt{x}}{2}=3$, т. е. $x=36$. Второй корень $z=-3$ приведёт к уравнению $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}=-3$, которое не имеет решений (никакая степень положительного числа 2 не может быть отрицательным числом).

Отв. $x=36$.

288. Последовательно находим (см. решение предыдущей задачи):

$$2\lg\frac{2}{10}+\lg(5^{\sqrt{x}}+1)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5),$$

$$\lg\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2(5^{\sqrt{x}}+1)\right]=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5);$$

$$\frac{1}{25}(5^{\sqrt{x}}+1)=5^{1-\sqrt{x}}+5.$$

После упрощения получим

$$5^{2\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0,$$

откуда $5^{\sqrt{x}} = 125$, или $5^{\sqrt{x}} = -1$. Второе уравнение не имеет решений; первое даёт $\sqrt{x} = 3$; $x = 9$.

Отв. $x = 9$.

289. Представим данное уравнение в виде

$$5^{\lg x} + 5^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} + 3^{\lg x - 1}.$$

Вынося за скобку $5^{\lg x}$ и $3^{\lg x}$, будем иметь

$$5^{\lg x}(1 + 5^{-1}) = 3^{\lg x}(3 + 3^{-1}),$$

или

$$\frac{5^{\lg x}}{3^{\lg x}} = \frac{25}{9}; \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2,$$

откуда $\lg x = 2$.

Отв. $x = 100$.

290. Логарифмируя при основании 10, получим

$$2\lg^4 x - 1{,}5\lg^2 x = \frac{1}{2}.$$

Это биквадратное уравнение (относительно $\lg x$) имеет два действительных корня: $\lg x = 1$ и $\lg x = -1$; следовательно, $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

Отв. $x_1 = 10$; $x_2 = 0{,}1$.

291. Потенцируя, получим

$$64\sqrt[24]{2^{x^2 - 40x}} = 1, \text{ или } 2^{x^2 - 40x} = \left(\frac{1}{64}\right)^{24},$$

т. е. $2^{x^2 - 40x} = 2^{-6 \cdot 24}$; отсюда $x^2 - 40x + 144 = 0$.

Отв. $x_1 = 36$, $x_2 = 4$.

292. Согласно определению логарифма данное уравнение равносильно уравнению $9 - 2^x = 2^{3-x}$, или $9 - 2^x = \frac{2^3}{2^x}$, откуда $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$. Решая это уравнение (квадратное относительно 2^x), находим

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 0.$$

Отв. $x_1 = 3$; $x_2 = 0$.

293. Как в задаче **288**, получим

$$2(4^{x-2}+9)=10(2^{x-2}+1).$$

Заметив, что

$$2^{x-2}=2^x 2^{-2}=\frac{1}{4}\cdot 2^x, \text{ а } 4^{x-2}=4^x 4^{-2}=\frac{1}{16}4^x,$$

получим уравнение

$$2^{2x}-20\cdot 2^x+64=0,$$

откуда, как в предыдущей задаче, найдём $x_1=4$; $x_2=2$.

Отв. $x_1=4$; $x_2=2$.

294. Последний член удобно перенести в правую часть. Затем, как в задаче 288, получим $4\cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}=3^{\frac{1}{x}}+27$. Заметив, что $3^{1+\frac{1}{2x}}=3\cdot 3^{\frac{1}{2x}}$, получим уравнение

$$12\cdot 3^{\frac{1}{2x}}=3^{\frac{1}{x}}+27.$$

Полагая $3^{\frac{1}{2x}}=z$, будем иметь $3^{\frac{1}{x}}=\left(3^{\frac{1}{2x}}\right)^2$, так что получим уравнение $z^2-12z+27=0$; корни его $z_1=9$; $z_2=3$.

Отв. $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{2}$.

295. Потенцируя (ср. решение задачи **288**), будем иметь

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}}{100}=\frac{\sqrt{16}}{4^{\sqrt{x+0,25}}};$$

это уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{100}\left(3^{\sqrt{4x+1}}-\frac{16}{2^{\sqrt{4x+1}}}\right)=\frac{2}{2^{\sqrt{4x+1}}}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем

$$6^{\sqrt{4x+1}}-16=200, \text{ т. е. } 6^{\sqrt{4x+1}}=6^3,$$

откуда $x=2$.

Отв. $x=2$.

296. Представим данное уравнение в виде

$$4\lg 2+2\lg(x-3)=\lg(7x+1)+\lg(x-6)+\lg 3;$$

потенцируя, находим:

$$2^4(x-3)^2=3(7x+1)(x-6).$$

Корни этого квадратного уравнения суть $x_1=9$; $x_2=-3{,}6$. Второй корень не годится, так как он даёт $x-3=-6{,}6$, значит, выражение $\lg(x-3)$ не имеет действительного значения [то же можно сказать и о выражениях $\lg(7x+1)$ и $\lg(x-6)$].

Отв. $x=9$.

297. Правую часть представим в виде

$$-\log_5(0{,}2-0{,}2\cdot 5^{x-3})=-\log_5 0{,}2-\log_5(1-5^{x-3}).$$

Слагаемое $(x-3)$ представим в виде $\log_5 5^{x-3}$. После переноса членов получим уравнение

$$\log_5 120+\log_5 5^{x-3}+\log_5 0{,}2=$$
$$=2\log_5(1-5^{x-3})-\log_5(1-5^{x-3}),$$

или

$$120\cdot 0{,}2\cdot 5^{x-3}=1-5^{x-3}.$$

Отв. $x=1$.

298. Заданные уравнения можно представить в виде

$$\begin{cases} 2^{6x+3}=2^{4y+4}, \\ 5^{1+x-y}=5^{\frac{4y+2}{2}}. \end{cases}$$

Приравнивая показатели степени, получаем систему

$$\begin{cases} 6x-4y=1, \\ x-3y=0. \end{cases}$$

Отв. $x=\frac{3}{14}$; $y=\frac{1}{14}$.

299. Потенцируя первое уравнение, получим систему уравнений

$$\begin{cases} xy=1, \\ x+y=\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Отв. $x_1=3$, $y_1=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=3$.

300. В алгебре обычно рассматриваются только логарифмы положительных чисел при положительных основаниях; иначе число может не иметь (действительного) логарифма. Поэтому будем считать, что известные величины a и b (основания логарифмов) положительны; неизвестные величины x, y («числа») также должны быть положительными.

Потенцируя, находим

$$xy = a^2, \quad \frac{x}{y} = b^4.$$

Эта система имеет два решения:

$$1)\ x = ab^2, \quad y = \frac{a}{b^2},$$

$$2)\ x = -ab^2, \quad y = -\frac{a}{b^2}.$$

Но второе решение не годится, так как при положительных значениях a, b оно даёт отрицательные значения x и y.

Отв. $x = ab^2$; $y = \frac{a}{b^2}$.

301. Потенцируя, получим систему

$$\frac{x^2+y^2}{10} = 13, \quad \frac{x+y}{x-y} = 8;$$

из второго уравнения $y = \frac{7}{9}x$; подставляя в первое уравнение, будем иметь два решения:

$$1)\ x_1 = 9, \quad y_1 = 7; \ 2)\ x_2 = -9, \quad y_2 = -7.$$

Второе решение не годится, так как тогда $x+y<0$ и $x-y<0$ (см. решение задачи **300**).

Отв. $x = 9$; $y = 7$.

302. Потенцируя, будем иметь

$$\begin{cases} x - y = xy, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

При первом решении имеем

$$x-y=xy=-2+\sqrt{5}>0.$$

При втором получаем

$$x-y=xy=-2-\sqrt{5}<0.$$

Второе решение не годится, так как основание логарифмов xy должно быть положительным (см. задачу **300**).

Отв. $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

303. Потенцируя, получим систему

$$1+\frac{x}{y}=\frac{a^2}{y}; \quad xy=b^4,$$

или

$$\begin{cases} x+y=a^2, \\ xy=b^4. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$1) \quad x_1=\frac{a^2+\sqrt{a^4-4b^4}}{2}, \quad y_1=\frac{a^2-\sqrt{a^4-4b^4}}{2};$$

$$2) \quad x_2=\frac{a^2-\sqrt{a^4-4b^4}}{2}, \quad y_2=\frac{a^2+\sqrt{a^4-4b^4}}{2}.$$

Считая данные величины a и b положительными (как основания логарифмов), мы должны различать два случая:

$$1) \quad a^4<4b^4, \text{ т. е. } a<\sqrt{2}\,b \quad \text{и} \quad 2) \quad a^4\geqslant 4b^4,$$

т. е. $a\geqslant\sqrt{2}\,b$. В первом случае система не имеет решения, так как x и y — мнимые числа. Во втором случае x и y не только действительны, но и положительны, так как и сумма $x+y=a^2$, и произведение $xy=b^4$ положительны.

Отв. $x=\frac{a^2+\sqrt{a^4-4b^4}}{2}$; $y=\frac{a^2-\sqrt{a^4-4b^4}}{2}$.

304. Потенцируя первое уравнение, получим систему

$$\begin{cases} 4xy=9a^2, \\ x+y=5a. \end{cases}$$

Оба её решения годны.

Отв. 1) $x_1=\frac{a}{2}$, $y_1=\frac{9}{2}a$; 2) $x_2=\frac{9}{2}a$, $y_2=\frac{a}{2}$.

305. Так как во втором уравнении неизвестные x и y входят под знаком логарифма, то оба они положительны (если решение существует). Что касается величины a, то она может быть и отрицательной (ибо под знаком логарифма стоит положительное число a^2). Однако в этом случае вместо равенства $\lg(a^2)=2\lg a$ надо написать $\lg(a^2)=2\lg|a|$. Для краткости обозначим $\lg x=X$; $\lg y=Y$; $\lg|a|=A$. Логарифмируя первое уравнение заданной системы, получим систему

$$X+Y=2A, \quad X^2+Y^2=10A^2.$$

Возвышая первое уравнение в квадрат и вычитая второе, получим $XY=-3A^2$, так что имеем равносильную систему

$$X+Y=2A; \quad XY=-3A^2.$$

Следовательно, X и Y — корни уравнения $z^2-2Az-3A^2=0$. Значит, одно решение есть $X=3A$, $Y=-A$, т. е. $x=|a|^3$, $y=\frac{1}{|a|}$. Другое решение: $x=\frac{1}{|a|}$, $y=|a|^3$.

Проверка показывает, что оба решения годятся.

Отв. $x_1=|a|^3$, $y_1=\frac{1}{|a|}$; $x_2=\frac{1}{|a|}$, $y_2=|a|^3$.

306*. Из второго уравнения имеем $y-x=(\sqrt{2})^4=4$. Следовательно, $y=x+4$. Подставив в первое уравнение, получим $3^x\cdot 2^{x+4}=576$, или $6^x\cdot 2^4=576$.

Отв. $x=2$; $y=6$.

307. Данную систему можно написать так:

$$\begin{cases} xy=a, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2=b. \end{cases}$$

Так как оба числа x и y должны быть положительными, то получаем систему

$$\begin{cases} xy=a \\ \frac{x}{y}=\sqrt{b}. \end{cases}$$

Отв. $x=\sqrt{a}\sqrt[4]{b}$; $y=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}$.

308. Данную систему можно записать в виде

$$\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}\log_b x + \log_b y = \frac{3}{2},$$

откуда

$$x\sqrt{y} = a^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{x}\,y = b^{\frac{3}{2}}.$$

Перемножая эти уравнения, будем иметь $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, или $xy = ab$. Последнее уравнение делим на каждое из предыдущих.

Отв. $x = \frac{a^2}{b}, \quad y = \frac{b^2}{a}.$

309. Решение аналогично предыдущему.

Отв. $x = a\sqrt[3]{b^2}; \quad y = \frac{a}{b\sqrt[3]{b}}.$

310. Пользуясь формулой (а) (стр. 192), запишем первое уравнение так:

$$\log_v u + \frac{1}{\log_v u} = 2, \quad \text{откуда} \quad \log_v u = 1,$$

т. е. $u = v$. Подставляя во второе уравнение, будем иметь $u^2 + u - 12 = 0$. Годится только положительное решение (см. решение задачи 300).

Отв. $u = v = 3.$

311. Обозначим $\sqrt[x]{a} = u$; тогда

$$\sqrt{a} = u^{\frac{x}{2}}$$

и

$$\log_{\sqrt[x]{a}} \sqrt{a} = \log_u u^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2};$$

аналогично

$$\log_{\sqrt[y]{b}} \sqrt{b} = \frac{y}{2}.$$

Следоаательно, второе уравнение можно записать так:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, & (1) \\ x+y=\frac{2a}{\sqrt{3}}, & (2) \end{cases}$$

равносильную данной. Возведём уравнение (2) в квадрат. Получим

$$x^2+2xy+y^2=\frac{4a^2}{3}. \qquad (2a)$$

Вычитая (1) из (2а), найдём

$$xy=\frac{a^2}{3}.$$

Мы приходим к системе

$$\begin{cases} x+y=\frac{2a}{\sqrt{3}}, & (2) \\ xy=\frac{a^2}{3}. & (3) \end{cases}$$

Она имеет единственное решение

$$x=y=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Замечание. При возведении какого-либо уравнения в квадрат мы можем получить лишние решения. Так и есть в данном случае: уравнение (2а) имеет лишние решения по сравнению с (2). Например, значения $x=y=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ удовлетворяют уравнению (2а), но не удовлетворяют уравнению (2). Иными словами, уравнение $x^2+2xy+y^2=\frac{4a^2}{3}$ не равносильно уравнению $x+y=\frac{2a}{\sqrt{3}}$; оно равносильно двум уравнениям: $x+y=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ и $x+y=-\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Тем не менее данная система и система уравнений $x+y=\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $xy=\frac{a^2}{3}$ равносильны, потому что в последнюю систему входит уравнение $x+y=\frac{2a}{\sqrt{3}}$, и тем самым исключается возможность равенства $x+y=-\frac{2a}{\sqrt{3}}$

при $a \neq 0$ (при $a=0$ уравнения $x+y=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ и $x+y=-\frac{2a}{\sqrt{3}}$ совпадают).

Но если бы мы взяли не систему (2)—(3), а систему (1)—(3), т. е. систему

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, & (1) \\ xy=\frac{a^2}{3}, & (3) \end{cases}$$

то она не была бы равносильна данной. Действительно, кроме решения $x=y=\frac{a}{\sqrt{3}}$ она имела бы ещё решение $x=y=-\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Поэтому в случаях, когда мы возводим одно или несколько уравнений в квадрат, всегда необходимо либо исследовать вопрос о равносильности, либо с помощью подстановки проверить, какие решения годятся, а какие нет.

Отв. $x=y=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

312. Принимая во внимание формулу (б) на стр. 192, будем иметь $\log_4 x=\frac{1}{2}\log_2 x$; вследствие этого первое уравнение приводится к виду $x=y^2$. Решаем систему

$$\begin{cases} x=y^2, \\ x^2-5y^2+4=0. \end{cases}$$

Отв. $x_1=4,\ y_1=2;\ x_2=1,\ y_2=1$.

313. С помощью формулы (б) на стр. 192, данную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 z=2, \\ \log_3 y+\frac{1}{2}\log_3 z+\frac{1}{2}\log_3 x=2, \\ \log_4 z+\frac{1}{2}\log_4 x+\frac{1}{2}\log_4 y=2. \end{cases}$$

Потенцируя, находим

$$\begin{cases} x\sqrt{yz}=4, \\ y\sqrt{zx}=9, \\ z\sqrt{xy}=16. \end{cases} \qquad (a)$$

Перемножая все уравнения (а), получим

$$(xyz)^2 = 4 \cdot 9 \cdot 16,$$

откуда

$$xyz = 24 \qquad (б)$$

(берём арифметическое значение корня, так как по смыслу данных уравнений x, y, z должны быть положительны). Возводим каждое из уравнений (а) в квадрат и делим на (б).

Отв. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{27}{8}$, $z = \frac{32}{3}$.

314. Из первого уравнения находим $x + y = 2^{x-y}3^{\frac{x-y}{2}}$, а из второго $x + y = 3 \cdot 2^{x-y}$, следовательно,

$$3^{\frac{x-y}{2}} = 3 \quad \text{или} \quad \frac{x-y}{2} = 1.$$

Значит, $x + y = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Отв. $x = 7$; $y = 5$.

315. Заданная система приводится к следующей:

$$\frac{x+y}{10} = \frac{7}{x}, \quad x^2 - y^2 = 40.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим $x - y = \frac{4x}{7}$.

Решив систему

$$x + y = \frac{70}{x} \quad \text{и} \quad x - y = \frac{4x}{7},$$

будем иметь $x_1 = 7$, $y_1 = 3$; $x_2 = -7$, $y_2 = -3$. Корни x_2, y_2 не удовлетворяют второму уравнению заданной системы, так как числа $x_2 + y_2$ и $x_2 - y_2$ отрицательны.

Отв. $x = 7$; $y = 3$.

316. Представим данную систему в виде

$$2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5+\frac{3y}{x}}, \quad 3^{\frac{x}{y}} = 3^{1+\frac{2-2y}{y}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x}, \quad \frac{x}{y} = 1 + \frac{2-2y}{y}.$$

Введём обозначение $\frac{x}{y}=t$; тогда из первого уравнения будем иметь $2t^2-5t-3=0$; $t_1=3$, $t_2=-\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{x}{y}=3$ или $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$. Отсюда находим выражения $x=3y$ и $x=-\frac{1}{2}y$; подставляя их во второе уравнение, найдём

$$x_1=-2,\ y_1=4;\ x_2=\frac{3}{2},\ y_2=\frac{1}{2}.$$

Отв. $x_1=-2$, $y_1=4$, $x_2=\frac{3}{2}$, $y_2=\frac{1}{2}$.

317. Данная система приводится к следующей:

$$\begin{cases} \frac{2x}{y}-\frac{3y}{x}=5, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Из первого уравнения (см. решение задачи **316**) находим $\frac{x}{y}=3$ или $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$. Второе уравнение даёт $x_1=\frac{3}{2}$, $y_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-2$, $y_2=4$. Значения x_2, y_2 не подходят.

Отв. $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

318. Данная система приводится к следующей:

$$\begin{cases} \sqrt{xy}=4-\sqrt{x}, \\ 2\sqrt{xy}=3+\sqrt{y}. \end{cases}$$

Введя обозначения $\sqrt{x}=u$; $\sqrt{y}=v$, получим $uv=4-u$; $2uv=3+v$.

Отв. $x_1=4$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=9$.

319. Перепишем данную систему в виде

$$ay=x^p,\ bx=y^q.$$

Так как x и y должны быть положительными (как основания логарифмов), то исходная система может иметь решения лишь при положительных значениях a и b. Из первого уравнения найдём $y=\frac{x^p}{a}$; подставляя во второе уравнение, получаем

$x^{pq}=a^q bx$. Отбрасывая корень $x=0$ (x должно быть положительным), получаем уравнение $x^{pq-1}=a^q b$. Если $pq=1$, то это уравнение либо вовсе не имеет решений (при $a^q b\neq 1$), либо является тождеством (при $a^q b=1$). В последнем случае исходная система имеет бесчисленное количество решений (x — произвольное число, а $y=\frac{x^p}{a}$; или y — произвольное число, а $x=\frac{y^q}{b}$). Если $pq\neq 1$, то получаем решение: $x=\sqrt[pq-1]{a^q b}$, $y=\sqrt[pq-1]{b^p a}$.

Отв. $x=\sqrt[pq-1]{a^q b}$, $y=\sqrt[pq-1]{b^p a}$ $(pq\neq 1)$.

ГЛАВА 5

ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия

320. По условию $a_1=5$, $d=4$. Подставляя эти значения в (3), получим после некоторых преобразований уравнение

$$2n^2+3n-10\,877=0.$$

Корни его: $n_1=73$ и $n_2=-74{,}5$; из них годится только первый.

Отв. 73 члена.

321. По условию

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)=26,$$
$$a_1(a_1+d)(a_1+2d)(a_1+3d)=880.$$

Первое уравнение даёт $4a_1+6d=26$, откуда $a_1=\frac{13-3d}{2}$. Подставляя во второе уравнение и упрощая выражения в скобках, получаем

$$\frac{13-3d}{2}\cdot\frac{13-d}{2}\cdot\frac{13+d}{2}\cdot\frac{13+3d}{2}=880.$$

Освобождаясь от знаменателя и перемножая числители (удобнее всего перемножить первый числитель на четвёртый и второй на третий), находим:

$$9d^4-1690d^2+14\,481=0.$$

Обозначим через d', d'', d''', d'''' корни этого биквадратного уравнения, находим $d'=3$; $d''=-3$; $d'''=\frac{\sqrt{1609}}{3}$ и $d''''=-\frac{\sqrt{1609}}{3}$; из уравнения $a_1=\frac{13-3d}{2}$ находим соответствующие значения первого члена:

$$a_1'=2;\ a_1''=11;\ a_1'''=\frac{13-\sqrt{1609}}{2};\ a_1''''=\frac{13+\sqrt{1609}}{2}.$$

Отв. Задача имеет четыре решения:

1) $\div 2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ \ldots,$

2) $\div 11;\ 8;\ 5;\ 2;\ -1;\ \ldots,$

3) $\div \frac{13-\sqrt{1609}}{2};\ \frac{39-\sqrt{1609}}{6};\ \frac{39+\sqrt{1609}}{6};\ \frac{13+\sqrt{1609}}{2};\ \ldots,$

4) $\div \frac{13+\sqrt{1609}}{2};\ \frac{39+\sqrt{1609}}{6};\ \frac{39-\sqrt{1609}}{6};\ \frac{13-\sqrt{1609}}{2};\ \ldots$

322. Выражаем a_p и a_q через a_1 и d; по условию получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1+d(p-1)=q, \\ a_1+d(q-1)=p. \end{cases}$$

Отсюда находим $d=-1$ и $a_1=p+q-1$. По формуле (1) находим:

$$a_n=(p+q-1)-(n-1)=p+q-n.$$

Отв. $a_n=p+q-n.$

323. Натуральные двузначные числа составляют арифметическую прогрессию с разностью $d=1$; при этом первый член $a_1=10$, а последний $a_n=99$. По формуле (1) находим число членов $n=90$. Формула (2) даёт:

$$S_n=\frac{(10+99)\cdot 90}{2}=4905.$$

Отв. 4905.

324. Обозначим нечётные числа через n, $(n+2)$, $(n+4)$, $(n+6)$. Тогда заключённые между ними чётные числа будут $(n+1)$, $(n+3)$, $(n+5)$. Согласно условию

$$n^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+6)^2 = (n+1)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+48,$$

или

$$n^2+[(n+2)^2-(n+1)^2]+[(n+4)^2-(n+3)^2]+ [(n+6)^2-(n+5)^2]-48=0,$$

откуда

$$n^2+(2n+3)+(2n+7)+(2n+11)-48=0,$$

или

$$n^2+6n-27=0.$$

Отсюда $n=3$ или $n=-9$.

Отв. 1) 3; 5; 7; 9 или 2) -9; -7; -5; -3.

325. Члены a_2; a_4; a_6; ...; a_{20} составляют арифметическую прогрессию с разностью $2d$ и числом членов 10. Применяя формулу (3) (где нужно взять a_2 вместо a_1 и $2d$ вместо d), найдём

$$\frac{(2a_2+2d\cdot 9)\,10}{2}=250,$$

т. е.

$$a_2+9d=25.$$

Подставляя сюда $a_2=a_1+d$, имеем

$$a_1+10d=25. \qquad \text{(а)}$$

Таким же образом, исходя из прогрессии $\div a_1$; a_3; a_5; ...; a_{19} найдём

$$a_1+9d=22. \qquad \text{(б)}$$

Из (а) и (б) можно найти a_1 и d, а затем все члены прогрессии. Но так как требуется найти только средние члены, т. е. $a_{10}=a_1+9d$ и $a_{11}=a_1+10d$, то (а) и (б) сразу дают $a_{10}=22$ и $a_{11}=25$.

Отв. Средние члены равны 22 и 25.

326. Введём обозначения $b_1=(a+x)^2$, $b_2=(a^2+x^2)$, $b_3=(a-x)^2$. Находим $b_2-b_1=b_3-b_2=-2ax$. Следовательно, члены b_1, b_2, b_3 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=-2ax$. По формуле (3) имеем

$$S_n=\frac{[2(a+x)^2-2ax(n-1)]n}{2}=[a^2+(3-n)ax+x^2]n.$$

Отв. $S_n=[a^2+(3-n)ax+x^2]n.$

327. По формуле (3) имеем

$$S_1=\frac{2a_1+d(n_1-1)}{2}\cdot n_1,$$

$$S_2=\frac{2a_1+d(n_2-1)}{2}\cdot n_2,$$

$$S_3=\frac{2a_1+d(n_3-1)}{2}\cdot n_3,$$

или

$$\frac{S_1}{n_1}=a_1+\frac{d}{2}(n_1-1),$$

$$\frac{S_2}{n_2}=a_1+\frac{d}{2}(n_2-1),$$

$$\frac{S_3}{n_3}=a_1+\frac{d}{2}(n_3-1).$$

Умножаем полученные равенства соответственно на (n_2-n_3), (n_3-n_1) и (n_1-n_2) и складываем произведения, после чего найдём

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=$$
$$=a_1[(n_2-n_3)+(n_3-n_1)+(n_1-n_2)]+$$
$$+\frac{d}{2}[(n_1-1)(n_2-n_3)+(n_2-1)(n_3-n_1)+(n_3-1)(n_1-n_2)].$$

Выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю, следовательно,

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0,$$

что и требовалось доказать.

328. Из условия следует, что $S_{10} = 5S_5$. Выразив S_5 и S_{10} по формуле (3) и учитывая, что по условию $a_1 = 1$, найдём

$$\frac{(2+9d)\,10}{2} = 5 \cdot \frac{(2+4d)\,5}{2},$$

откуда $d = -3$.

Отв. $\div +1;\ -2;\ -5;\ -8;\ \ldots$

329. По условию

$$S_n = 3n^2 \quad \text{или} \quad \frac{[2a_1 + d(n-1)]\,n}{2} = 3n^2.$$

Так как $n \neq 0$, то, сократив это уравнение на n, получим $2a_1 + dn - d = 6n$ или

$$2a_1 - d = (6-d)\,n. \qquad \text{(a)}$$

По условию равенство (a) должно удовлетворяться при любом значении n, но левая часть (a) не содержит n, тогда как правая часть будет менять значение с изменением n, если только множитель $6-d$ не равен нулю. Лишь в случае $6-d=0$ правая часть не зависит от n (равна нулю), поэтому мы должны иметь $d=6$. Тогда из (a) находим $2a_1 - d = 0$, т. е. $a_1 = \frac{d}{2} = 3$.

Отв. $\div 3;\ 9;\ 15;\ 21;\ \ldots$

330*. Числа, которые при делении на 4 дают в остатке 1, имеют вид $4k+1$ (k — любое натуральное число). Они образуют арифметическую прогрессию с разностью 4. Первое из двузначных чисел этого вида есть 13 (оно получается при $k=3$); последнее есть 97. По формуле (1), где $a_1 = 13$, $a_n = 97$, $d = 4$ находим $n = 22$. По формуле (3) найдём искомую сумму.

Для определения, при каких значениях k числа вида $4k+1$ будут двузначными, можно было бы воспользоваться системой неравенств

$$\begin{cases} 4k+1 \geqslant 10, \\ 4k+1 < 100. \end{cases}$$

Из этой системы находим $2\frac{1}{4} \leqslant k < 24\frac{3}{4}$; следовательно, k может иметь значения, равные 3, 4, 5, ..., 24, число которых $n = (24-3)+1 = 22$.

Отв. 1210.

Геометрическая прогрессия

331. Среднее геометрическое двух (положительных) чисел a и b есть положительное число x, определяемое из пропорции $a:x=x:b$. Вставить три средних геометрических между числами 1 и 256 — значит найти три числа u_2, u_3, u_4, удовлетворяющих условиям:

$$1:u_2=u_2:u_3=u_3:u_4=u_4:256.$$

Значит, числа $u_1=1$, u_2, u_3, u_4 и $u_5=256$ образуют геометрическую прогрессию. По формуле n-го члена прогрессии $256=1\cdot q^4$. Это уравнение имеет один положительный корень $q=\sqrt[4]{256}=4$ (-4; $+4i$; $-4i$ не годятся). Теперь по той же формуле находим: $u_2=4$; $u_3=16$; $u_4=64$.

Отв. 4; 16; 64.

332. По условию $u_1+u_3=52$ и $u_2^2=100$, или $u_2=\pm 10$. По свойству геометрической прогрессии $u_1u_3=u_2^2=100$; следовательно, u_1 и u_3 — корни уравнения $u^2-52u+100=0$. Отсюда найдём: $u_1'=50$ и $u_3'=2$ или $u_1''=2$ и $u_3''=50$.

Отв. Числа будут: 1) 50; 10; 2 или 2) 50; -10; 2, или те же числа в обратном порядке.

333. По условию: 1) $u_3-u_1=9$ и 2) $u_5-u_3=36$. Применяя формулу $u_n=u_1q^{n-1}$, напишем эти уравнения в виде: 1) $u_1q^2-u_1=9$; 2) $u_1q^4-u_1q^2=36$. Деля уравнение 2) на 1), получим $q^2=4$; отсюда $q=\pm 2$; из 1) находим: $u_1=3$.

Отв. 1) $+3$; 6; 12; 24; 48; ...,
2) $+3$; -6; 12; -24; 48; ...

334. По условию $u_1+u_4=27$ и $u_2u_3=72$; но так как $\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_4}{u_3}$ или $u_2u_3=u_1u_4$, то имеем систему двух уравнений:

$$1)\ u_1+u_4=27 \text{ и } 2)\ u_1u_4=72,$$

откуда $u_1=3$ и $u_4=24$ или $u_1=24$ и $u_4=3$. Из формулы $u_4=u_1q^3$ находим соответственно $q=2$ или $q=\frac{1}{2}$.

Отв. 3; 6; 12; 24 или в обратном порядке: 24; 12; 6; 3.

335. По условию 1) $u_1+u_4=35$ и 2) $u_2+u_3=30$. Так же, как в задаче **333**, для определения q получаем уравнение

$$\frac{1+q^3}{q(1+q)}=\frac{35}{30},$$

или по сокращении

$$\frac{1-q+q^2}{q}=\frac{7}{6}.$$

Находим:

$$1)\quad q=\frac{3}{2};\ u_1=8;\quad 2)\ q=\frac{2}{3};\ u_1=27.$$

Получаем две прогрессии:

$$1)\ \div\div 8;\ 12;\ 18;\ 27;\ 40{,}5;\ \ldots,$$

$$2)\ \div\div 27;\ 18;\ 12;\ 8;\ 5\frac{1}{3};\ \ldots,$$

у которых первые четыре члена одинаковы, но идут в обратном порядке.

Отв. 8; 12; 18; 27.

336. Во второй данной сумме заменяем каждый член через предыдущий, умноженный на q (согласно определению геометрической прогрессии); получим

$$u_1q+u_2q+u_3q+u_4q+u_5q=62$$

или

$$q(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)=62.$$

По условию выражение в скобках равно 31; следовательно, $q=2$. Пользуясь формулой $S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$ имеем $31=\frac{u_1(2^5-1)}{2-1}$ откуда $u_1=1$.

Отв. $\div\div$ 1; 2; 4; 8; ...

337. По условию имеем:

$$1)\ u_2+u_3+u_4+u_5=19{,}5,\quad 2)\ u_1+u_2+u_3+u_4=13.$$

Задача аналогична предыдущей.

Отв. $u_1=1{,}6$ и $u_5=8{,}1$.

338. Члены u_4 и u_6 — равноотстоящие от начала и конца: поэтому $u_4u_6 = u_1u_9$. Так как по условию $u_1u_9 = 2304$, то $u_4u_6 = 2304$; кроме того, по условию $u_4 + u_6 = 120$. Из этих двух уравнений находим $u_4' = 24$; $u_6' = 96$ и $u_4'' = 96$; $u_6'' = 24$. Возьмём первое решение. По формуле $u_n = u_1q^{n-1}$ имеем:

$$1)\ 24 = u_1q^3;\quad 2)\ 96 = u_1q^5.$$

Разделив 2) на 1), находим $q^2 = 4$, откуда $q = 2$ или $q = -2$. В первом случае уравнение 1) даёт $u_1 = 3$, во втором случае $u_1 = -3$. Девять членов прогрессии будут в первом случае:

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96;\ 192;\ 384;\ 768;$$

во втором:

$$-3;\ 6;\ -12;\ 24;\ -48;\ 96;\ -192;\ 384;\ -768.$$

Взяв решение $u_4'' = 96$; $u_6'' = 24$, найдём те же два ряда членов, но в обратном порядке.

Отв. 1) $u_1 = 3$; $q = 2$;
2) $u_1 = -3$; $q = -2$;
3) $u_1' = 768$; $q = \frac{1}{2}$;
4) $u_1 = -768$; $q = -\frac{1}{2}$.

339. По условию 1) $u_1 + u_2 + u_3 = 126$ и 2) $u_1u_2u_3 = 13\,824$. Так как u_2 есть средняя пропорциональная между u_1 и u_3, то $u_1u_3 = u_2^2$; поэтому вместо 2) можно написать $u_2^3 = 13\,824$, откуда $u_2 = \sqrt[3]{13\,824}$. В данном случае, разлагая 13 824 на множители, легко найти, что $u_2 = 24$. Подставляя в 1) и 2), получаем систему уравнений: $u_1 + u_3 = 102$; $u_1u_3 = 576$. Решения её: $u_1 = 6$; $u_3 = 96$ и $u_1 = 96$; $u_3 = 6$. Получаем две прогрессии: ⦂⦂ 6; 24; 96 и ⦂⦂ 96; 24; 6, отличающиеся только порядком членов.

Отв. 6; 24; 96.

340. Из условия следует, что сумма членов, стоящих на чётных местах, в два раза больше суммы членов, стоящих на нечётных местах, т. е.

$$\frac{u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n}}{u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1}} = 2.$$

Заменяя члены u_2; u_4; u_6; ...; u_{2n} выражениями $u_2=u_1q$; $u_4=u_3q$; ...; $u_{2n}=u_{2n-1}q$, находим $q=2$.

Отв. Знаменатель прогрессии равен 2.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

341. Для доказательства того, что данные числа образуют геометрическую убывающую прогрессию, надо проверить, будут ли равны отношения $\frac{u_2}{u_1}$ и $\frac{u_3}{u_2}$ и будут ли они меньше 1. Имеем:

1) $\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$,

2) $\frac{u_3}{u_2}=\frac{1}{2}:\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

Так как $\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=q=\frac{1}{2+\sqrt{2}}<1$, то данные числа образуют геометрическую убывающую прогрессию. По формуле её суммы находим

$$S=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\left(1-\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)}=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=4+3\sqrt{2}.$$

Отв. $S=4+3\sqrt{2}$.

342. Как в предыдущей задаче, находим, что выражение в квадратных скобках равно $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1}$. Всё выражение тогда примет вид

$$(4\sqrt{3}+8)\cdot\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1}=-\frac{12}{\sqrt{3}-1}=-6(\sqrt{3}+1).$$

Отв. $-6(\sqrt{3}+1)$.

343. По условию

$$u_1=4 \quad \text{и} \quad u_3-u_5=\frac{32}{81}.$$

По формуле $u_n=u_1q^{n-1}$ из второго равенства получаем

$$u_1q^2-u_1q^4=\frac{32}{81}.$$

Учитывая, что $u_1=4$, получаем биквадратное уравнение $81q^4-81q^2+8=0$; его корни; $q_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $q_{3,4}=\pm\frac{1}{3}$. Отрицательные корни не годятся, так как по условию все члены положительны, положительные корни годятся оба, так как они меньше единицы. Получим две бесконечно убывающие прогрессии.

Отв. $S'=12(3+2\sqrt{2})$ и $S''=6$.

344. По условию

$$u_1+u_4=54 \text{ и } u_2+u_3=36.$$

С помощью формулы $u_n=u_1q^{n-1}$ получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} u_1+u_1q^3=54, \\ u_1q+u_1q^2=36, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u_1(1+q)(1-q+q^2)=54, & (1) \\ u_1q(1+q)=36. & (2) \end{cases}$$

Разделив (1) на (2), получим уравнение

$$\frac{1-q+q^2}{q}=\frac{3}{2},$$

из которого найдём $q_1=2$ и $q_2=\frac{1}{2}$. Годится $q_2=\frac{1}{2}<1$. Находим из (2) $u_1=48$.

Отв. $S=96$.

345. Первый способ. По условию

$$1)\ u_1+u_3+u_5+\ldots=36,$$
$$2)\ u_2+u_4+u_6+\ldots=12.$$

Члены первой и второй сумм составляют также бесконечно убывающие прогрессии, знаменатель которых одинаков и равен q^2, первый член в первой прогрессии равен u_1, а во второй u_2, т. е. u_1q. Выражая суммы первой и второй прогрессий по формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии (где вместо q берём q^2, а вместо u_1 во втором случае берём u_1q), получим: 1) $\frac{u_1}{1-q^2}=36$ и 2) $\frac{u_1q}{1-q^2}=12$. Деля 2) на 1), получим $q=\frac{1}{3}$, а из первого уравнения находим $u_1=32$.

Второй способ. Так как $u_2 = u_1 q$, $u_4 = u_3 q$ и т. д., то вместо $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots = 12$ получим $u_1 q + u_3 q + u_5 q + \ldots = 12$, или

$$q(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots) = 12. \qquad (1)$$

Разделив на (1) условие $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots = 36$, найдём $q = \frac{1}{3}$. С другой стороны, сумма всех членов прогрессии есть $12 + 36 = 48$. По формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии имеем $48 = \frac{u_1}{1 - \frac{1}{3}}$, откуда $u_1 = 32$.

Отв. $\div\div 32; \frac{32}{3}; \frac{32}{9}; \ldots$

346. По условию

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = 56; \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots = 448.$$

Слагаемые второй суммы образуют также геометрическую бесконечно убывающую прогрессию с первым членом u_1^2 и знаменателем q^2. Выражая суммы этих прогрессий, получим

$$\frac{u_1}{1-q} = 56, \quad \frac{u_1^2}{1-q^2} = 448$$

или

$$u_1 = 56(1-q), \qquad (1)$$

$$u_1^2 = 448(1-q^2). \qquad (2)$$

Деля (2) на (1), находим

$$u_1 = 8(1+q). \qquad (3)$$

Исключая u_1 из уравнений (1) и (3), получаем

$$8(1+q) = 56(1-q),$$

откуда $q = \frac{3}{4}$. Из (1) находим $u_1 = 14$.

Отв. $u_1 = 14$, $q = \frac{3}{4}$.

347. Задача решается аналогично предыдущей. Для определения u_1 и q получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q}=3, & (1) \\ \dfrac{u_1^3}{1-q^3}=\dfrac{108}{13}. & (2) \end{cases}$$

После исключения из этих уравнений u_1 получим уравнение $3q^2-10q+3=0$. Из двух корней его годится только $q=\frac{1}{3}$ (другой $q=3$ больше единицы). Из уравнения (1) находим $u_1=2$.

Отв. $\div\div 2;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{9};\ \ldots$

348. Задача решается аналогично задачам **346**, **347**. Для определения u_1 и q получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1q=6, & (1) \\ \dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{u_1^2}{1-q^2}. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (2) равносильно уравнению $u_1=8(1+q)$. Исключая u_1 из системы $u_1q=6$, $u_1=8(1+q)$, получаем уравнение $4q^2+4q-3=0$. Из двух его корней $q_1=-\frac{3}{2}$, $q_2=\frac{1}{2}$ годится только второй, так как абсолютная величина первого больше единицы. Из (1) находим $u_1=12$.

Отв. $\div\div 12;\ 6;\ 3;\ \ldots$

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

349. Из условия находим:

$$d=16-14=2;\quad a_1=14-d=12;$$
$$a_1+a_2+a_3=12+14+16=42.$$

Следовательно, в искомой геометрической прогрессии 1) $q=2$ и 2) $u_1+u_1q+u_1q^2=42$, откуда $u_1=6$.

Отв. $\div\div 6;\ 12;\ 24;\ \ldots$

350. Первые три члена геометрической прогрессии суть 3; $3q$; $3q^2$. По условию $a_1=3$; $a_2=3q+6$; так как $a_3-a_2=a_2-a_1$, то $a_3=2a_2-a_1=6q+9$. По условию этот третий член равен третьему члену геометрической прогрессии, т. е. $3q^2$. Получаем уравнение $6q+9=3q^2$; корни его $q=3$ и $q=-1$. В первом случае геометрическая прогрессия будет ÷÷ 3; 9; 27; ..., а арифметическая ÷ 3; 15; 27; ... Во втором случае получаем два ряда чисел: 3; —3; 3; —3; ... и 3; 3; 3; ..., которые можно рассматривать соответственно как геометрическую прогрессию со знаменателем $q=-1$ и как арифметическую прогрессию с разностью $d=0$.

Отв. 1) ÷ 3; 15; 27; ...; ÷÷ 3; 9; 27; ...,
2) ÷ 3; 3; 3; ...; ÷÷ 3; —3; 3; —3; ...

351. Задача сходна с предыдущей. По условию $a_1=u_1=5$; следовательно, $u_3=5q^2$; $u_5=5q^4$. Далее по условию $a_4=u_3=5q^2$; $a_{16}=u_5=5q^4$. Значит: 1) $5q^2=5+3d$, 2) $5q^4=5+15d$. Исключая d, получаем уравнение $q^4-5q^2+4=0$, откуда $q^2=4$ или $q^2=1$. Так как $a_4=5q^2$, то четвёртый член арифметической прогрессии в первом случае равен 20, а во втором 5.

Замечание. В каждом из этих двух случаев получаем две различные геометрические прогрессии; арифметические же прогрессии — одинаковые. Именно, в первом случае имеем геометрическую прогрессию ÷÷ 5; 10; 20; ... и ÷÷ 5; —10; 20; ..., арифметическая же прогрессия (разность $d=\frac{5q^2-5}{3}=5$) будет ÷ 5; 10; 15; 20; ... Во втором случае получаем геометрическую прогрессию ÷÷ 5; 5; 5; ... и ÷÷ 5; —5; 5; —5; ...; арифметическая прогрессия состоит из равных членов ÷ 5; 5; 5; ...

Отв. 20 или 5.

352. По условию $a_1=u_1$; $a_2=u_1q$; $a_7=u_1q^2$. Отсюда находим:

1) $d=a_2-a_1=u_1(q-1)$ и 2) $6d=a_7-a_1=u_1(q^2-1)$.

Исключив d, получим $u_1(q^2-1)=6u_1(q-1)$. Так как $u_1\neq 0$, то $q^2-1=6(q-1)$, откуда $q=5$ или $q=1$. Из условия $u_1+u_1q+u_1q^2=93$ находим соответственно $u_1=3$ и $u_1=31$.

Отв. 1) 3; 15; 75. 2) 31; 31; 31.

353. По формуле (2) на стр. 43 находим $a_7=729$; следовательно, в геометрической прогрессии имеем: $u_1=a_1=1$; $u_7=a_7=729$. По условию требуется найти средний член, который будет четвёртым с начала и с конца и, следовательно, первый член u_1, искомый средний u_4 и последний u_7 образуют непрерывную пропорцию $u_1:u_4=u_4:u_7$. Отсюда $u_4^2=u_1u_7$ и $u_4^2=729$.

Отв. $u_4=\pm 27$.

354. По условию $a_1+a_2+a_3=15$. Так как $a_2-a_1=a_3-a_2$, то $2a_2=a_1+a_3$ и из условия имеем $2a_2+a_2=15$. Отсюда $a_2=5$. Тогда $a_1=5-d$; $a_2=5$; $a_3=5+d$ и по условию $u_1=a_1+1=6-d$; $u_2=a_2+4=9$; $u_3=a_3+19=24+d$. Так как $u_2^2=u_1u_3$, то имеем:

$$9^2=(6-d)(24+d),$$

откуда находим $d=3$, $a_1=2$ или $d=-21$, $a_1=26$.

Отв. 1) 2; 5; 8. 2) 26; 5; -16.

355. По условию $a_1=u_1+1$; $a_2=u_2+6$; $a_3=u_3+3$; отсюда $a_1+a_2+a_3=(u_1+u_2+u_3)+(1+6+3)$ или на основании условия, что $u_1+u_2+u_3=26$, получим

$$a_1+a_2+a_3=26+10=36.$$

Дальше задача решается аналогично предыдущей.

Отв. 2; 6; 18 или 18; 6; 2.

356. Положим, что искомые числа будут u_1; u_1q; u_1q^2; тогда по условию числа u_1, u_1q и (u_1q^2-64) составляют арифметическую прогрессию, и следовательно,

$$u_1q-u_1=(u_1q^2-64)-u_1q. \qquad (1)$$

Кроме того, по условию числа u_1; (u_1q-8); (u_1q^2-64) составляют геометрическую прогрессию, и следовательно,

$$(u_1q-8):u_1=(u_1q^2-64):(u_1q-8). \qquad (2)$$

После упрощений система уравнений (1) и (2) примет вид

$$u_1(q^2-2q+1)=64, \quad u_1(q-4)=4,$$

откуда находим $q=13$ и $u_1=\frac{4}{9}$ или $q=5$ и $u_1=4$.

Отв. 1) $\frac{4}{9}$; $\frac{52}{9}$; $\frac{676}{9}$. 2) 4; 20; 100.

357. Положим, что искомые числа будут u_1, u_2 и u_3. Если эти числа суть члены геометрической прогрессии, то

$$u_2^2 = u_1 u_3, \quad (1)$$

а если эти числа суть члены арифметической прогрессии, то

$$2u_2 = u_1 + u_3. \quad (2)$$

Исключив из (1) и (2) u_2, найдём $(u_1+u_3)^2 = 4u_1u_3$ или $(u_1-u_3)^2 = 0$, откуда $u_1 = u_3$, а из (2) находим $u_2 = u_1$. Следовательно, $u_1 = u_2 = u_3$.

Отв. Возможно, если три числа равны между собой.

ГЛАВА 6

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

Обозначения:

A_m^n — число размещений из m элементов по n,

P_n — число перестановок из n элементов,

C_m^n — число сочетаний из m элементов по n,

T_{k+1} $(= C_m^k a^k x^{m-k})$ есть $(k+1)$-й член разложения бинома $(x+a)^m$.

358. По условию

$$\frac{P_n}{P_{n+2}} = \frac{0,1}{3}, \text{ или } \frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{30},$$

откуда $(n+1)(n+2) = 30$. Корни этого уравнения $n_1 = 4$; $n_2 = -7$. Второй корень не годится.

Отв. $n = 4$.

359. По условию

$$5C_n^3 = C_{n+2}^4,$$

или

$$\frac{5n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

откуда

$$5(n-2) = \frac{(n+2)(n+1)}{4}.$$

Отв. $n_1 = 14$; $n_2 = 3$.

360. Искомый член

$$T_9=(-1)^8 C_{16}^8\left(\frac{a}{x}\right)^8\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot\frac{a^8}{x^4}.$$

Отв. $12\,870\frac{a^8}{x^4}$.

361. Имеем:

$$T_{n+1}=C_{12}^n\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^n\left(\frac{3}{4}\sqrt[4]{a^2}\right)^{12-n}.$$

Буква a здесь содержится в степени $\frac{n}{2}+\frac{2(12-n)}{3}$. По условию $\frac{n}{2}+\frac{2(12-n)}{3}=7$, откуда $n=6$, т. е. $n+1=7$.

Отв. Седьмой член.

362. Имеем:

$$T_{n+1}=C_{21}^n\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^n\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-n}=$$

$$=C_{21}^n a^{\frac{21-n}{3}-\frac{n}{6}} b^{\frac{n}{2}-\frac{21-n}{6}}.$$

По условию $\frac{n}{2}-\frac{21-n}{6}=\frac{21-n}{3}-\frac{n}{6}$, откуда $n=9$.

Отв. Десятый член.

363. После упрощения получаем: $\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$. Имеем:

$$T_{n+1}=(-1)^n C_{10}^n\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^n\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{10-n}=(-1)^n C_{10}^n a^{\frac{10-n}{3}-\frac{n}{2}}.$$

По условию $\frac{10-n}{3}-\frac{n}{2}=0$, откуда $n=4$.

Отв. $T_5=210$.

364. Пусть x есть показатель степени первого бинома. Тогда сумма биномиальных коэффициентов есть 2^x. Сумма биномиальных коэффициентов у второго бинома есть 2^{x+3}. Получаем уравнение

$$2^x+2^{x+3}=144;\ 2^x(1+8)=144;\ 2^x=2^4;\ x=4.$$

Отв. 4 и 7.

365. Имеем $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}=105$, откуда $m=15$; тогда

$$T_{13}=(-1)^{12}C_{15}^{12}\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12}(9x)^3=\frac{455}{x^3}.$$

Отв. $\frac{455}{x^3}$.

366. По условию $C_m^3=C_m^{12}$, следовательно, $m=15$. Тогда имеем

$$T_{n+1}=C_{15}^n\left(\frac{a}{x}\right)^n(x^2)^{15-n}=C_{15}^n a^n x^{30-3n}.$$

По условию $30-3n=0$; $n=10$.
Отв. $T_{11}=3003a^{10}$.

367. По условию $\frac{C_m^4}{C_m^2}=\frac{14}{3}$, т. е. $m^2-5m-50=0$, откуда $m=10$ (корень $m=-5$ не годится). Средний член

$$T_6=C_{10}^5(-1)^5\left(\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^5(a^{-2}\sqrt{a})^5=-252.$$

Отв. Средний (шестой) член равен -252.

368. По условию $1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}=46$. Дальше решается, как задача 367.
Отв. Искомый член (седьмой) $T_7=84$.

369. По условию $2^m=128$, откуда $m=7$. Имеем

$$T_{n+1}=C_7^n x^{-\frac{n}{3}}x^{\frac{3}{2}(7-n)}.$$

По условию $-\frac{n}{3}+\frac{3}{2}(7-n)=5$, откуда $n=3$.
Отв. Искомый член (четвёртый) $T_4=35x^5$.

370. Имеем: $u_6=u_1q^5=\frac{1}{i}(1+i)^5$. Множимое $\frac{1}{i}$ равно $\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$. Множитель $(1+i)^5$ согласно формуле бинома Ньютона равен $1+5i+10i^2+10i^3+5i^4+i^5$. Следовательно,

$$u_6=-i-5i^2-10i^3-10i^4-5i^5-i^6.$$

Теперь заменяем степени мнимой единицы их выражениями:

$$i^2 = -1;\quad i^3 = i^2 i = -i;\quad i^4 = i^3 i = -ii = +1;$$
$$i^5 = i^4 i = i;\quad i^6 = -1.$$

Замечание. В данном примере, где основанием степени является $1+i$ (или, вообще, когда основанием является двучлен вида $a \pm ai$), возведение в степень можно выполнить проще. Именно, возводим $1+i$ в квадрат. Получим $(1+i)^2 = 2i$, отсюда $(1+i)^5 = (1+i)^4 \cdot (1+i) = (2i)^2 \cdot (1+i) = -4(1+i)$.

Отв. $u_6 = -4 + 4i$.

371. Имеем $u_7 = i\left(1 + \frac{1}{i}\right)^6$. Так как $\frac{1}{i} = -i$, то $u_7 = i(1-i)^6$. Дальше можно решать, как предыдущую задачу. Можно также найти модуль и аргумент произведения шести сомножителей, равных $1-i$ каждый. Модуль величины $1-i$ есть $\sqrt{2}$; аргумент равен $-45°$. Значит, модуль произведения равен $(\sqrt{2})^6 = 8$, а аргумент $6(-45°) = -270°$. Следовательно,

$$(1-i)^6 = 8[\cos(-270°) + i\sin(-270°)] = 8i.$$

Отв. $u_7 = -8$.

372. По условию числа C_n^1; C_n^2; C_n^3 составляют арифметическую прогрессию. Значит, $C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2$, т. е.

$$n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Так как $n \neq 0$, то обе части равенства можно разделить на n. Получим уравнение $n^2 - 9n + 14 = 0$. Из его корней $n_1 = 7$ и $n_2 = 2$ второй не годится, так как при $n = 2$ разложение бинома имеет только три члена, а по условию имеется четвёртый член.

Отв. $n = 7$.

373. Решается, как предыдущая задача. После сокращения на $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ (это число не равно нулю, так как по условию $n \geqslant 6$) получим $n^2 - 21n + 98 = 0$.

Отв. $n = 14$ или $n = 7$.

374. Первое слагаемое в скобках запишем в виде $a^{\frac{4}{5}-\frac{x-1}{x}}=a^{\frac{5-x}{5x}}$; второе слагаемое в виде $a\cdot a^{\frac{x-1}{x+1}}=a^{\frac{2x}{x+1}}$. Четвертый член разложения равен $56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}}$. По условию $56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}}=56a^{5,5}$. Следовательно,

$$\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}=5{,}5.$$

Отв. $x=2$ или $x=-5$.

375. Представим данное выражение в виде $\left[2^{\frac{x-1}{x}}+2^{\frac{2(3-x)}{4-x}}\right]^6$. По условию

$$15\cdot 2^{\frac{4(x-1)}{x}}\,2^{\frac{4(3-x)}{4-x}}=240,$$

т. е.

$$2^{\frac{4(x-1)}{x}+\frac{4(3-x)}{4-x}}=2^4.$$

Следовательно,

$$\frac{4(x-1)}{x}+\frac{4(3-x)}{4-x}=4.$$

Отв. $x=2$.

376. Седьмой член T_7 разложения бинома $\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}\right)^x$ равен

$$T_7=C_x^6\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x-6}\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^6,$$

а седьмой член от конца

$$T_7'=C_x^6\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{x-6}.$$

Следовательно,

$$T_7:T_7'=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{(x-6)-6}\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{6-(x-6)}=2^{\frac{x-12}{3}}3^{\frac{x-12}{3}}=6^{\frac{x-12}{3}}.$$

По условию $6^{\frac{x-12}{3}}=\frac{1}{6}$, т. е. $6^{\frac{x-12}{3}}=6^{-1}$. Следовательно, $\frac{x-12}{3}=-1$.

Отв. $x=9$.

377. По условию $C_5^2 x^3 (x^{\lg x})^2 = 10^6$, т. е. $10x^{3+2\lg x} = 10^6$ или $x^{3+2\lg x} = 10^5$. Логарифмируя это равенство, найдём $(3+2\lg x)\lg x = 5$. Решив последнее уравнение, получим $(\lg x_1) = 1$ и $(\lg x_2) = -\frac{5}{2}$.

Отв. $x_1 = 10$; $x_2 = 10^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{100\sqrt{10}}$.

378. По условию

$$C_6^3 (\sqrt{x})^{\frac{3}{\lg x+1}} (\sqrt[12]{x})^3 = 200, \text{ т. е. } 20x^{\frac{\lg x+7}{4(\lg x+1)}} = 200.$$

Деля обе части этого уравнения на 20 и затем логарифмируя, получим после упрощений

$$(\lg x)^2 + 3\lg x - 4 = 0.$$

Отсюда $(\lg x_1) = 1$, $(\lg x_2) = -4$.

Отв. $x_1 = 10$; $x_2 = 0{,}0001$.

379. Решается как предыдущая. Получим уравнение $x^{\lg x-2} = 1000$. Логарифмируя полученное равенство, найдём $(\lg x_1) = 3$ и $(\lg x_2) = -1$.

Отв. $x_1 = 1000$; $x_2 = 0{,}1$.

380. Решается как две предыдущие.

Отв. $x_1 = 10$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{10}}$.

381. *Отв.* $x_1 = 100$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{100}}$.

382. *Отв.* $x_1 = 1000$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

383*. По условию

$$T_{k+2} - T_{k+1} = 30, \qquad \text{(a)}$$

где

$$T_{k+1} = C_{12}^k x^{-\frac{k}{2}} x^{\frac{12-k}{6}} = C_{12}^k x^{\frac{6-2k}{3}} \text{ и } T_{k+2} = C_{12}^{k+1} x^{\frac{4-2k}{3}}.$$

По условию показатель $\frac{6-2k}{3}$ вдвое больше показателя $\frac{4-2k}{3}$, т. е. $\frac{6-2k}{3}=2\cdot\frac{4-2k}{3}$, откуда $k=1$. Тогда равенство (а) после упрощений примет вид:

$$2x^{\frac{4}{3}}-11x^{\frac{2}{3}}+5=0.$$

Применяем подстановку $x^{\frac{2}{3}}=y$.

Отв. $x_1=5\sqrt{5}$; $x_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

384*. По условию $5C_m^1=C_m^3$, следовательно, имеем уравнение

$$5m=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Так как $m\neq 0$, то обе части уравнения можно разделить на m. Получим $m_1=7$ и $m_2=-4$. Годится только $m_1=7$, так как m должно быть целым положительным.

По условию $T_4=7\cdot 20$; значит,

$$C_7^3\left(2^{-\frac{x}{8}}\right)^3\left(2^{\frac{x-1}{8}}\right)^4=140.$$

Отв. $x=4$.

385. Из условия имеем $C_m^2-m=20$; $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}-m=20$. Из двух корней $m_1=8$ и $m_2=-5$ годится только первый, так как предполагается, что показатель бинома — целое положительное число. Перепишем бином в виде $\left(2^{\frac{x}{4}-\frac{3}{16}}+2^{\frac{5}{16}-\frac{x}{2}}\right)^8$. По условию

$$T_4-T_6=56$$

или

$$C_8^3 2^{3\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)}2^{5\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)}-C_8^5 2^{5\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)}2^{3\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)}=56.$$

После упрощений получаем $56\cdot 2^x - 56\cdot\frac{2}{2^x} = 56$. Положив $2^x = y$, получим уравнение $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = 2$ и $y_2 = -1$. Так как $2^x = y$ не может быть отрицательным числом, то годится только $y_1 = 2$ и, следовательно, $2^x = 2$, т. е. $x = 1$.

Отв. $x = 1$.

386. Так как биномиальные коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, равны, то вместо коэффициентов трёх последних членов можно взять коэффициенты трёх первых членов, т. е. $1 + m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} = 22$, откуда $m = 6$ (см. предыдущую задачу). Следовательно, бином будет $\left(2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{1-x}{2}}\right)^6$. По условию

$$T_3 + T_5 = 135$$

или

$$C_6^2\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^2\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^4 + C_6^4\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 135.$$

После упрощений получим

$$2^{x+1} + 2^{2-x} = 9 \text{ или } 2\cdot 2^x + \frac{2^2}{2^x} = 9.$$

Как в предыдущей задаче, найдем: 1) $2^x = 4$ и 2) $2^x = \frac{1}{2}$.

Отв. $x_1 = 2$; $x_2 = -1$.

387. Числа a_1, a_3, a_5, являющиеся соответственно первым, третьим и пятым членами арифметической прогрессии, сами образуют арифметическую прогрессию, так что $2a_3 = a_1 + a_5$. Так как по условию $a_1 = C_m^1$; $a_3 = C_m^2$; $a_5 = C_m^3$, то

$$\frac{2m(m-1)}{1\cdot 2} = m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Сократив на m ($m \neq 0$), найдем уравнение $m^2 - 9m + 14 = 0$, корни которого $m_1 = 7$, $m_2 = 2$. Так как по условию в разложении бинома имеется не меньше шести членов, то $m \geqslant 5$, значит, годится только $m_1 = 7$. Бином будет

$$\left[2^{\frac{1}{2}\lg(10-3^x)} + 2^{\frac{x-2}{5}\lg 3}\right]^7.$$

По условию

$$T_6 = 21$$

или

$$C_7^5 2^{(x-2)\lg 3} 2^{\lg(10-3^x)} = 21.$$

Отсюда имеем

$$2^{(x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x)} = 1 = 2^0;$$

следовательно,

$$(x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x) = 0.$$

Потенцируя, получим

$$3^{x-2}(10-3^x) = 1$$

или

$$\frac{3^x}{3^2}(10-3^x) = 1.$$

Дальше решается, как задача 385.

Отв. $x_1 = 2$; $x_2 = 0$.

388. По условию числа $\frac{14}{9}C_m^2$, C_m^3 и C_m^4 образуют геометрическую прогрессию; следовательно,

$$\frac{14}{9}C_m^2 C_m^4 = (C_m^3)^2.$$

Обе части равенства можно разделить на $m^2(m-1)^2(m-2)$, так как ни m, ни $m-1$, ни $m-2$ не равняются нулю (ибо из условия следует, что $m \geqslant 3$); получим $m = 9$. По условию $T_4 = 16{,}8$ или

$$C_9^3 5^{3\left[\frac{1}{6}\lg(x-1) - \frac{1}{3}\lg 5\right]} 5^{6\left[-\frac{1}{6}\lg(6-\sqrt{8x})\right]} = 16{,}8.$$

Отсюда получим уравнение

$$\frac{1}{2}\lg(x-1) - \lg 5 - \lg(6-\sqrt{8x}) = -1.$$

После потенцирования имеем

$$10\sqrt{x-1} = 5(6-\sqrt{8x}).$$

Отсюда $x_1 = 50$ и $x_2 = 2$. Первый корень не годится, так как при $x = 50$ число $6-\sqrt{8x}$ отрицательно и, значит, не имеет логарифма.

Отв. $x = 2$.

389. По условию

$$\lg(3\cdot C_m^3)-\lg C_m^1=1,$$

или

$$\lg\frac{3C_m^3}{C_m^1}=\lg 10;$$

отсюда $\frac{3C_m^3}{C_m^1}=10$. После упрощений найдём уравнение $m^2-3m-18=0$, корни которого $m_1=6$ и $m_2=-3$. Следовательно, показатель бинома $m=6$.

Из условия $9T_3-T_5=240$ получим уравнение

$$9C_6^2 2^{2\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)}2^{4\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)}-C_6^4 2^{4\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)}2^{2\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)}=240,$$

откуда найдём

$$9\cdot 2^{3x-2}-2^{3x+1}=16$$

или

$$\frac{9\cdot 2^{3x}}{2^2}-2^{3x}\cdot 2=16.$$

Следовательно,

$$2^{3x}=2^6 \text{ и } x=2.$$

Отв. $x=2$.

ГЛАВА 7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

390. Вес патрона составляется из веса снаряда, заряда и гильзы. Снаряд и гильза, взятые вместе, составляют по весу $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$ всего патрона. На долю заряда остаётся $1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$ веса патрона, что составляет 0,8 *кг*. Следовательно, вес патрона равен 0,8 *кг* : $\frac{1}{12}=9{,}6$ *кг*.

Отв. 9,6 *кг*.

391. Мужчины составляют $100\%-35\%=65\%$ от общего числа рабочих. Мужчин больше, чем женщин, на $65\%-35\%=30\%$, что составляет 252 человека. Следовательно, общее число рабочих равно $\frac{252\cdot 100}{30}=840$.

Отв. 840 рабочих.

392. Процент прибыли берётся по отношению к себестоимости (принимаемой за 100%). Значит, продажная цена (1386 руб.) составляет $100\% + 10\% = 110\%$ себестоимости. Себестоимость равна

$$\frac{1386 \cdot 100}{110} = 1260 \text{ (руб.)}.$$

Отв. 1260 руб.

393. Убыток исчисляется в процентах по отношению к себестоимости (принимаемой за 100%). Значит, 3348 руб. составляют $100\% - 4\% = 96\%$ себестоимости. Следовательно, продукция обошлась артели в

$$\frac{3348 \cdot 100}{96} = 3487{,}5 \text{ (руб.)}.$$

Отв. 3487 р. 50 к.

394. Содержание меди в руде составляет $\frac{34{,}2 \cdot 100}{225}\%$.
Отв. $15{,}2\%$.

395*. Цена снижена на 290 коп. — 260 коп. = 30 коп. Эта сумма составляет $\frac{30 \cdot 100}{290}\%$ от старой цены. Число $\frac{30 \cdot 100}{290} = 10\frac{10}{29}$ заменяем приближённо десятичной дробью.
Отв. $10{,}34\%$.

396. Задача решается как предыдущая.
Отв. $10{,}94\%$.

397. По условию 2 *кг* составляют 32% от веса винограда. Вес винограда равен $\frac{2 \cdot 100}{32} = 6{,}25$.
Отв. 6,25 *кг*.

398. Обозначим число экскурсантов через x. В первом случае взносы составят $75x$ коп.; значит, на расходы нужна сумма $(75x + 440)$ коп. Во втором случае взносы составят $80x$ коп.; значит, на расходы нужно $(80x - 440)$ коп. Следовательно, $75x + 440 = 80x - 440$.
Отв. 176 человек.

399. Пусть было x человек; каждый должен был заплатить $\frac{72}{x}$. По условию

$$(x-3)\left(\frac{72}{x}+4\right)=72.$$

Отв. 9 человек.

400. Пусть цена одного экземпляра первого тома составляет x руб., а второго тома y руб. Первое условие даёт уравнение $60x+75y=405$. При скидке в 15% цена экземпляра первого тома составит $0{,}85x$ руб.; при скидке в 10% цена экземпляра второго тома составит $0{,}9y$ руб. Из второго условия получаем уравнение

$$60\cdot 0{,}85x+75\cdot 0{,}9y=355\frac{1}{2}.$$

Решая систему двух уравнений, найдём $x=3$; $y=3$.

Отв. Цена первого тома 3 руб.; цена второго тома тоже 3 руб.

401. Пусть первый предмет куплен за x руб. Тогда второй куплен за $(225-x)$ руб. При продаже первого предмета получено 25% прибыли. Значит, он продан за $1{,}25x$ руб. Второй предмет, на котором получено 50% прибыли, продан за $1{,}5(225-x)$ руб. По условию общий процент прибыли (по отношению к покупной цене 225 руб.) составлял 40%. Значит, общая сумма выручки была $1{,}40\cdot 225=315$ руб. Получаем уравнение

$$1\frac{1}{4}x+1\frac{1}{2}(225-x)=315.$$

Отв. Первый предмет куплен за 90 руб., второй — за 135 руб.

402. В 40 *кг* морской воды содержится $40\cdot 0{,}05=2$ *кг* соли. Чтобы 2 *кг* составляли 2% общего веса, последний должен равняться $2:0{,}02=100$ *кг*.

Отв. Нужно добавить 60 *кг*.

403. Обозначим длины катетов (в метрах) через x и y. По условию $x^2+y^2=(3\sqrt{5})^2$. После увеличения на $133\frac{1}{3}\%$, т. е. на $\frac{133\frac{1}{3}}{100}=1\frac{1}{3}$ своей длины, первый катет станет равным $2\frac{1}{3}x$. Второй катет после увеличения на $16\frac{2}{3}\%$ будет равен $1\frac{1}{6}y$. Получаем уравнение $2\frac{1}{3}x+1\frac{1}{6}y=14$.

Отв. 3 *м* и 6 *м*.

404. Если из первого мешка отсыпать $12,5\%$ находящейся там муки, в нём останется $87,5\%$, что составит 140 *кг* : 2 = 70 *кг*. Следовательно, в первом мешке $\frac{70\cdot 100}{87,5}$.

Отв. В первом мешке 80 *кг*, во втором 60 *кг*.

405. Оба завода вместе могли выполнить в день $\frac{1}{12}$ часть заказа. По условию производительность завода *B* составляет $66\frac{2}{3}\%$, т. е. $\frac{2}{3}$ производительности завода *A*; следовательно, производительность обоих заводов составляет $1\frac{2}{3}$ производительности завода *A*. Значит, завод *A* может выполнить в день $\frac{1}{12}:1\frac{2}{3}=\frac{1}{20}$ часть заказа, а завод *B* — выполнить $\frac{1}{20}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}$ часть заказа. До остановки завода *A* была выполнена $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ часть всего заказа. На выполнение остающихся $\frac{5}{6}$ всего заказа заводу *B* требуется $\frac{5}{6}:\frac{1}{30}=25$ дней.

Отв. Заказ будет выполнен через

$$27(=25+2) \text{ дней.}$$

406. Верно решившие 14 человек составляют $100\%-(12\%+32\%)=56\%$ всех учеников класса. Общее число учеников класса было $\frac{14\cdot 100}{56}=25$.

Отв. 25 учеников.

407. Вес отрезанной части составляет 72% от веса всего рельса; значит, вес оставшегося куска (45,2 *кг*) составляет $100\% - 72\% = 28\%$ веса рельса; 1% этого веса составляет $\frac{45,2}{28}$, а 72% составляют $\frac{45,2}{28} \cdot 72 = 116\frac{8}{35}$ *кг* $\approx 116,23$ *кг*.

Вместо того чтобы определять 1% веса рельса, можно составить пропорцию $x : 45,2 = 72 : 28$.

Отв. Вес отрезанной части (округлённо) 116,2 *кг*.

408. Вес всего сплава (2 *кг*) составляет $100\% + 14\frac{2}{7}\% = 114\frac{2}{7}\%$ веса меди. Значит, 1% веса меди составляет $\frac{4}{114\frac{2}{7}}$ *кг*. Следовательно, вес серебра, составляющий $14\frac{2}{7}\%$ веса меди, равен

$$\frac{2}{114\frac{2}{7}} \cdot 14\frac{2}{7} = \frac{1}{4} \text{ кг}.$$

Вместо того чтобы определять 1% веса меди, можно составить пропорцию

$$x : 2 = 14\frac{2}{7} : 114\frac{2}{7}.$$

Отв. Вес серебра $\frac{1}{4}$ *кг*.

409. Заработок второго составляет $1\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2} = \frac{7}{30}$ заработка первого или, в процентах, $\frac{7}{30} \cdot 100\% = 23\frac{1}{3}\%$. Общий заработок трёх рабочих (4080 руб.) составляет

$$100\% + 23\frac{1}{3}\% + 43\frac{1}{3}\% = 166\frac{2}{3}\%$$

от заработка первого. Один процент заработка первого составляет $\frac{4080}{166\frac{2}{3}}$ руб., значит, первый заработал

$$\frac{4080}{166\frac{2}{3}} \cdot 100 = 2448 \text{ руб.}$$

Второй заработал $23\frac{1}{3}\%$ этой суммы, т. е.

$$\frac{2448 \cdot 23\frac{1}{3}}{100} = 571,2 \text{ руб.};$$

третий заработал

$$\frac{2448 \cdot 43\frac{1}{3}}{100} = 1060,8 \text{ руб.}$$

Отв. 2448 руб.; 571 р. 20 к.; 1060 р. 80 к.

410. Если вес сахара в первом ящике x *кг*, то вес сахара во втором ящике $\frac{4}{5}x$ *кг*, а в третьем $\frac{4}{5}x \cdot \frac{42\frac{1}{2}}{100} = \frac{17}{50}x$ *кг*. По условию $x + \frac{4}{5}x + \frac{17}{50}x = 64,2$, откуда $x = 30$ (*кг*). От этого числа берём сначала $\frac{4}{5}$, потом $\frac{17}{50}$.

Отв. 30 *кг*, 24 *кг*, 10,2 *кг*.

411. Возьмём x *т* первого сорта; в нём будет $0,05x$ *т* никеля. Второго сорта нужно взять $(140 - x)$ *т* с содержанием никеля в $0,40 \cdot (140 - x)$ *т*. В общем количестве 140 *т* стали по условию содержится $0,30 \cdot 140$ *т* никеля. Следовательно, $0,05x + 0,40 \cdot (140 - x) = 0,30 \cdot 140$. Отсюда $x = 40$.

Отв. 40 *т* первого сорта и 100 *т* второго сорта.

412. Сплав содержит 12 *кг* $\cdot$ 0,45 = 5,4 *кг* меди. Так как в новом сплаве эти 5,4 *кг* меди составляют по весу 40%, то вес нового сплава будет 5,4 : 0,40 = 13,5 *кг*. Значит, нужно добавить 13,5 *кг* — 12 *кг* = 1,5 *кг*.

Отв. 1,5 *кг*.

413. Решается как предыдущая задача: 1) 735 *г* $\cdot$ 0,16 = = 117,6 *г*; 2) 117,6 *г* : 0,10 = 1176 *г*; 3) 1176 *г* — 735 *г* = 441 *г*.

Отв. 441 *г*.

414. Пусть x — вес меди (в *кг*). Тогда $24 - x$ есть вес цинка. Потеря веса составляет $\frac{1}{9}x$ (для меди) и $\frac{1}{7}(24 - x)$ (для цинка). Следовательно, $\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}(24 - x) = 2\frac{8}{9}$. Отсюда $x = 17$.

Отв. 17 *кг* меди, 7 *кг* цинка.

415. Количество рельсов длиной 25 *м* обозначим через x, а рельсов длиной 12,5 *м* — через y. На участке 20 *км* = = 20 000 *м* нужно уложить 40 000 *м* рельсов (две линии). По условию

$$25x + 0{,}50 \cdot 12{,}5y = 40\,000 \quad \text{и} \quad 12{,}5y + \frac{66\frac{2}{3}}{100} \cdot 25x = 40\,000.$$

Отв. 1200 рельсов по 25 *м* и 1600 рельсов по 12,5 *м*.

416. Пусть число учеников есть x. При обмене карточками каждый получит $x-1$ карточек, а все x учеников получат $x(x-1)$ карточек; по условию имеем уравнение $x(x-1)=870$.

Отв. 30 учеников.

417. Пусть x — меньшее, а y — большее число ($x<y$). Первое условие даёт $\sqrt{xy}=x+12$, а второе условие — $\frac{x+y}{2}=y-24$, т. е. $y-x=48$. Решая систему, находим $x=6$, $y=54$. Так как $6<54$, то это решение годится.

Отв. 6 и 54.

418. Пусть наименьшее число есть x, следующее y и наибольшее z. Имеем три уравнения:

$$y-x=z-y; \quad xy=85; \quad yz=115.$$

Из первого уравнения находим $z=2y-x$; подставляя в третье уравнение, находим $2y^2-xy=115$ или в силу второго уравнения $2y^2=200$. Из двух решений ($x_1=8{,}5$, $y_1=10$, $z_1=11{,}5$; $x_2=-8{,}5, y_2=-10$, $z_2=-11{,}5$) первое годится (ибо $x_1<y_1<z_1$), а второе нет (ибо $x_2>y_2>z_2$).

Отв. 8,5; 10; 11,5.

419. Дано

$$\frac{x+y+z}{3}=a \quad \text{и} \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{3}=b.$$

Требуется найти $\frac{xy+yz+zx}{3}$. Из первого уравнения имеем $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=9a^2$. В силу второго уравнения имеем $x^2+y^2+z^2=3b$. Следовательно, $3b+2(xy+ +yz+zx)=9a^2$.

Отв. $\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{3a^2-b}{2}$.

420. Если длина листа x *см*, а ширина y *см*, то коробка будет иметь длину $(x-8)$ *см*, ширину $(y-8)$ *см* и высоту 4 *см*. По условию $4(x-8)(y-8)=768$ и $2x+2y=96$.

Отв. Размеры листа 32 *см* $\times$ 16 *см*.

421. Пусть цифра десятков x, а цифра единиц y (x и y — целые положительные числа, меньшие чем 10). Имеем систему:

$$\frac{10x+y}{xy}=2\frac{2}{3}; \quad (10x+y)-(10y+x)=18.$$

Из двух решений $\left(x=6,\ y=4 \text{ и } x=\frac{1}{8},\ y=-\frac{15}{8}\right)$ годится только первое.

Отв. 64.

422. Если число десятков равно x, то число единиц равно $x+2$. Получаем уравнение

$$[10x+(x+2)][x+(x+2)]=144,$$

откуда $x=2$ и $x=-3\frac{2}{11}$; по условию второе решение не годится.

Отв. Искомое число есть 24.

423. Пусть искомое число будет x. Если справа к нему приписать 5, то получим число $10x+5$. По условию имеем

$$10x+5=(x+3)(x-13).$$

Отв. 22.

424. Пусть большее число есть x, а меньшее y. Если к большему числу приписать три цифры (нуль и две цифры меньшего числа), то цифры большего числа будут выражать число тысяч, так что в итоге получим $1000x+y$. Из меньшего же числа получим число $1000y+10x$. По условию

$$1000x+y=2(1000y+10x)+590, \quad 2x+3y=72.$$

Решая систему, находим $x=21$, $y=10$. Эти числа, будучи двузначными, удовлетворяют условию задачи.

Отв. 21 и 10.

425. Если цифра единиц множителя есть x (x — целое число, меньшее 10), то цифра десятков $3x$. Множитель равен $3 \cdot 10x + x = 31x$. Ошибочно записанный множитель был $10x + 3x = 13x$. Истинное произведение равно $78 \cdot 31x$, ошибочно полученное произведение есть $78 \cdot 13x$. По условию $78 \cdot 31x - 78 \cdot 13x = 2808$. Отсюда находим $x = 2$.

Отв. Истинное произведение равно 4836.

426. Скорость первого поезда x *км/час*, скорость второго $(x - 12)$ *км/час*. Имеем уравнение

$$\frac{96}{x-12} - \frac{96}{x} = \frac{2}{3}.$$

Отв. Скорость первого поезда 48 *км/час*, второго — 36 *км/час*.

427. Пусть скорость первого равна v *км/час*; тогда скорость второго равна $(v-2)$ *км/час*. Первый затрачивает $\frac{24}{v}$ час., второй $\frac{24}{v-2}$ час. Получаем уравнение

$$\frac{24}{v-2} - \frac{24}{v} = 1.$$

Отв. 8 *км/час*, 6 *км/час*.

428. Пусть скорость поезда x *км/час*; тогда скорость парохода $(x - 30)$ *км/час*. Поезд затрачивает $\frac{66}{x}$ час., а пароход $\frac{80,5}{x-30}$ час. Получаем уравнение

$$\frac{80,5}{x-30} - \frac{66}{x} = 4 + \frac{15}{60}.$$

Отв. Скорость поезда 44 *км/час*, скорость парохода 14 *км/час*.

429. Пусть первая мастерская шила в день по x костюмов; тогда вторая шила по $x + 4$ костюма. Первая мастерская выполнила заказ в $\frac{810}{x}$ дней; значит, срок заказа был $\left(\frac{810}{x} + 3\right)$ дней. Срок заказа второй мастерской был тот же.

Следовательно,

$$\frac{810}{x}+3=\frac{900}{x+4}+6.$$

Отв. Первая мастерская шила в день по 20 костюмов, вторая — по 24 костюма.

430. Пусть скорость парохода, идущего на юг, x *км/час*, а парохода, идущего на запад, $(x+6)$ *км/час*. Так как направления движения перпендикулярны, то по теореме Пифагора

$$(2x)^2+[2(x+6)]^2=60^2.$$

Отв. Скорость первого парохода 18 *км/час*, второго — 24 *км/час*.

431. Два скачка собаки составляют 4 *м*; 3 скачка лисицы составляют 3 *м*. Следовательно, когда собака пробегает 4 *м*, расстояние между собакой и лисицей сокращается на 4 *м* — 3 *м* = 1 *м*. Первоначальное же расстояние между ними в 30 раз больше. Значит, собака догонит лисицу, когда пробежит 4 *м* · 30 = 120 *м*.

Отв. На расстоянии 120 *м*.

432. За 1 мин. минутная стрелка поворачивается на 6°, а часовая — на $\frac{1}{2}^\circ$. Когда часы показывают 4 часа, угол между часовой и минутной стрелками равен 120°. За x минут стрелки поворачиваются соответственно на $6x$ и $\frac{1}{2}x$ градуса. По условию $6x-\frac{1}{2}x=120$.

Отв. Через $21\frac{9}{11}$ минуты.

433. Обозначим через t время следования поезда от A до C (в часах) и через v — установленную скорость (в *км/час*). По условию путь AB пройдён за $\frac{t}{2}$ час. при скорости v *км/час*, а путь BC — за $\frac{t}{2}$ час. при скорости $0{,}75\cdot v$ *км/час*. Значит, $AB=v\frac{t}{2}$ *км* и $BC=0{,}75\cdot v\frac{t}{2}$ *км*. По условию на обратном пути участок CB был пройдён со скоростью v, а участок BA — со скоростью $0{,}75\ v$. Значит, участок CB был

пройдён за время $\frac{0,75\,vt}{2} : v$, т. е. за $\frac{0,75t}{2}$ час., а участок BA — за $\frac{vt}{2} : 0,75\,v$, т. е. за $\frac{t}{2\cdot 0,75}$ час. По условию

$$\frac{t}{2\cdot 0,75}+\frac{0,75\,t}{2}=\frac{5}{12}+t.$$

Отв. 10 час.

434. Положим, что велосипедист ехал со скоростью v *км/час*; тогда скорость, которая предусматривалась, равнялась $(v-1)$ *км/час*. Фактически велосипедист был в пути $\frac{3}{v}$ час., а полагался срок $\frac{30}{v-1}$ час. По условию

$$\frac{30}{v-1}-\frac{30}{v}=\frac{3}{60}.$$

Отрицательное решение $v=-24$ не годится.

Отв. 25 *км/час*.

435. Пусть скорость поезда по расписанию составляет x *км/час*. Тогда фактическая скорость была $(x+10)$ *км/час*. Продолжительность пути по расписанию $\frac{80}{x}$ час., а фактическая $\frac{80}{x+10}$ час. По условию

$$\frac{80}{x}-\frac{80}{x+10}=\frac{16}{60}.$$

Отв. 50 *км/час*

436. Первую половину пути поезд шёл x час. Тогда, чтобы придти без опоздания, он должен был пройти вторую половину за $x-\frac{1}{2}$ часа. В первую половину пути скорость поезда $\frac{420}{x}$ *км/час*, а во вторую $\frac{420}{x-\frac{1}{2}}$ *км/час*. По условию

$$\frac{420}{x-\frac{1}{2}}-\frac{420}{x}=2.$$

Уравнение имеет один положительный корень.

Отв. 21 час.

437. Пусть скорость первого поезда x *км/час*, скорость второго y *км/час*. В первом случае первый поезд пройдёт до встречи $10x$ *км*, второй $10y$ *км*. Следовательно,

$$10x+10y=650.$$

Во втором случае первый поезд пройдёт до встречи $8x$ *км*, а второй (который шёл 8 час. + 4 часа 20 мин. $=12\frac{1}{3}$ часа) пройдёт $12\frac{1}{3}y$. Следовательно,

$$8x+12\frac{1}{3}y=650.$$

Отв. Средняя скорость первого поезда 35 *км/час*, второго — 30 *км/час*.

438. Пусть скорость первого поезда x *км/час*, а второго y *км/час*. Расстояние в 600 *км* первый поезд проходит за $\frac{600}{x}$ час., а второй — за $\frac{600}{y}$ час. По условию

$$\frac{600}{x}+3=\frac{600}{y}, \quad \frac{250}{x}=\frac{200}{y}.$$

Отв. Скорость первого поезда 50 *км/час*, второго — 40 *км/час*.

439. Если длина пути x *км*, то при скорости 3,5 *км/час* дачник пройдёт это расстояние за $\frac{x}{3,5}$ часа. А так как он опоздает к поезду на час, то в момент его выхода до отхода поезда оставалось $\left(\frac{x}{3,5}-1\right)$ час. Через час после выхода дачника оставалось до отхода поезда $\left(\frac{x}{3,5}-2\right)$ часа, а пройти нужно было ещё $(x-3,5)$ *км*. При скорости 5 *км/час* дачник пройдёт это расстояние за $\frac{x-3,5}{5}$ час. Так как он придёт за $\frac{1}{2}$ часа от отхода поезда, то

$$\frac{x}{3,5}-2-\frac{x-3,5}{5}=\frac{1}{2}.$$

Отв. 21 *км*.

440. Пусть скорость велосипеда x *км/мин*, а автомобиля y *км/мин*. Автомобиль пробыл в пути 10 мин., а велосипедист $10+15=25$ мин., когда его догнал автомобиль. В этот момент расстояния, пройдённые ими, были одинаковы. Следовательно, $25x=10y$. Когда на обратном пути автомобиль встретил велосипедиста, автомобиль прошёл $50y$ *км*, а велосипедист $65x$ *км*. Эти расстояния в сумме дают двойное расстояние от Москвы до Мытищ. Поэтому $65x+50y=38$. Решая систему уравнений, находим $x=0{,}2$; $y=0{,}5$.

Отв. Скорость велосипедиста 0,2 *км/мин* = 12 *км/час*;
скорость автомобиля 0,5 *км/мин* = 30 *км/час*.

441. Пусть поезда встретились через x час. после выхода скорого поезда. Тогда почтовый поезд в момент встречи находился в пути $(x+3)$ часа. До места встречи каждый поезд прошёл $1080:2=540$ (*км*). Значит, скорость первого поезда $\frac{540}{x}$ *км/час*, а второго $\frac{540}{x+3}$ *км/час*. По условию $\frac{540}{x}-\frac{540}{x+3}=15$. Годится только один корень $x=9$.

Отв. Через 9 час. после выхода скорого поезда.

442. Пусть первый велосипедист ехал x час. Рассуждая, как в предыдущей задаче, составим уравнение $\frac{36}{x-1}-\frac{42}{x}=4$.

Отв. Скорость первого велосипедиста 14 *км/час*, а второго 18 *км/час*; первый ехал до встречи 3 часа, а второй 2 часа.

443. Пусть расстояние AB между пунктами отправления есть x *км*, и пусть первый пешеход пройдёт его за y час. По условию второй проходит путь BA за $(y-5)$ час. Значит, за час первый проходит $\frac{x}{y}$ *км*, а второй $\frac{x}{y-5}$ *км*. За час расстояние между пешеходами сокращается на $\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y-5}\right)$ *км*, за $3\frac{1}{3}$ часа — на $3\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y-5}\right)$. Так как через $3\frac{1}{3}$ часа они встретились, то $3\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y-5}\right)=x$.

Так как $x \neq 0$, то обе части можно разделить на x. Получаем:

$$3\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-5}\right)=1.$$

Отсюда находим y. Значение x остаётся неопределённым.

Отв. Первый пройдёт всё расстояние за 10 час., второй — за 5 час.

444. Обозначим пункт встречи через C. Пусть $AC = x$ *км*; тогда по условию $CB = (x+12)$ *км*. Далее, по условию первый турист прошёл путь CB за 8 час. Значит, его скорость $\frac{x+12}{8}$ *км/час*. Так же найдём, что скорость второго туриста $\frac{x}{9}$ *км/час*. Следовательно, путь AC первый турист проделал за $x : \frac{x+12}{8} = \frac{8x}{x+12}$ час., второй же турист прошёл путь BC за $\frac{9(x+12)}{x}$ час. А так как второй был в пути на 6 час. больше, чем первый, то

$$\frac{9(x+12)}{x} - \frac{8x}{x+12} = 6.$$

При решении этого уравнения можно ввести вспомогательное неизвестное $\frac{x+12}{x} = z$. Получим $9z - \frac{8}{z} = 6$. Из двух корней $\left(z_1 = \frac{4}{3} \text{ и } z_2 = -\frac{2}{3}\right)$ второй не годится, так как обе величины $x = AC$ и $x+12 = CB$ должны быть положительными. Из уравнения $\frac{x+12}{x} = \frac{4}{3}$ найдём $x = 36$. Значит, $AC = 36$ *км*, $CB = 48$ *км*.

Отв. $AB = 84$ *км*. Скорость первого туриста 6 *км/час*; скорость второго туриста 4 *км/час*.

445. Задача сходна с предыдущей. Пусть дирижабль пролетел до встречи x *км*; тогда самолёт до встречи пролетел $(x+100)$ *км*. Скорость дирижабля $\frac{x+100}{3}$ *км/час*; скорость самолёта $\frac{x}{1\frac{1}{3}}$ *км/час*. От своего аэродрома до места встречи дирижабль летел $x : \frac{x+100}{3} = \frac{3x}{x+100}$ час.; самолёт же летел от

своего аэродрома до места встречи $\frac{1\frac{1}{3}(x+100)}{x}$ час. Получаем уравнение

$$\frac{3x}{x+100}=\frac{\frac{4}{3}(x+100)}{x},\text{ т. е. }\left(\frac{x}{x+100}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

Следовательно, $\frac{x}{x+100}=\pm\frac{2}{3}$, откуда $x=200$; второй корень не годится.

Отв. Расстояние между аэродромами 500 *км*; скорость дирижабля 100 *км/час*; скорость самолёта 150 *км/час*.

446. Первый способ. Можно решать, как предыдущую задачу. Получим уравнение

$$\left(\frac{x}{x-a}\right)^2=\frac{n}{m},\text{ т. е. }\frac{x}{x-a}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}.$$

Отсюда

$$x=\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}.$$

Затем найдём скорости

$$v_1=\frac{x-a}{m}\text{ и }v_2=\frac{x}{n}.$$

Второй способ. Обозначим через C точку встречи. Так как первый пройдёт расстояние CB за m часов, то $CB=v_1m$ *км*. Аналогично $CA=v_2n$ *км*. По условию $CA-CB=a$. Получаем уравнение $nv_2-mv_1=a$. На прохождение участка AC первый пешеход затратил время $\frac{AC}{v_1}$ час.; значит, с момента его выхода до встречи прошло $\frac{v_2n}{v_1}$ час. Аналогично с момента выхода второго пешехода до встречи прошло $\frac{v_1m}{v_2}$ час. Так как оба вышли одновременно, то $n\frac{v_2}{v_1}=m\frac{v_1}{v_2}$. Из последнего уравнения находим $v_1:v_2=\sqrt{n}:\sqrt{m}$. Это уравнение решаем совместно с первым.

Для симметрии полезно ввести вспомогательное неизвестное $t = \frac{v_1}{\sqrt{n}} = \frac{v_2}{\sqrt{m}}$. Подставляя в первое уравнение выражения $v_1 = \sqrt{n}\,t$; $v_2 = \sqrt{m}\,t$, получим $(n\sqrt{m} - m\sqrt{n})\,t = a$, откуда $t = \frac{a}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}$; теперь находим:

$$v_1 = \frac{a\sqrt{n}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}, \qquad v_2 = \frac{a\sqrt{m}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}.$$

Замечание. Задача имеет решение только в том случае, когда $n\sqrt{m} > m\sqrt{n}$; деля обе части этого неравенства на положительное число $\sqrt{m}\sqrt{n}$, получаем $\sqrt{n} > \sqrt{m}$, т. е. $n > m$. Это условие можно получить и непосредственно из условия задачи: так как до встречи первый пешеход прошёл большее расстояние, чем второй, то его скорость больше, чем скорость второго. С другой стороны, первому пешеходу до конца пути остаётся пройти меньше, чем второму. Следовательно, первый придёт в B скорее, чем второй придёт в A.

Отв. Скорость первого пешехода $\frac{a\sqrt{n}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}$ *км/час*, скорость второго $\frac{a\sqrt{m}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}$ *км/час*.

447. Пусть в 1 сек. первое тело пробежит x градусов, а второе y градусов. Из первого условия находим $\frac{360}{y} - \frac{360}{x} = 5$. Каждую секунду расстояние между телами (по дуге) увеличивается на $(x - y)$ градусов. За время, протекающее от одного схождения до следующего (т. е. за 100 сек.) расстояние должно увеличиться на 360°. Поэтому $100(x - y) = 360$. Полученная система имеет два решения ($x_1 = 18$, $y_1 = 14{,}4$; $x_2 = -14{,}4$, $y_2 = -18$). Оба они годятся, но физический смысл их один и тот же (меняются только номера тел и направление движения).

Отв. 18°; 14°24′.

448. Обозначим скорость одного тела (выраженную в *м/мин*) через x, а скорость другого — через y. Положим, что $x > y$. Пусть тела движутся в одном направлении и сходятся в некоторой точке A. Пусть ближайшая следующая

встреча происходит в точке B (заранее не исключается, что точка B совпадает с точкой A; это будет, например, в случае, если скорость первого тела вдвое больше скорости второго; в этом случае до ближайшей встречи первое сделает два полных оборота, а второе — один).

На пути от A к B (этот путь может для одного тела или для обоих перекрывать сам себя) второе тело отстаёт от первого, и в момент ближайшего совпадения отставание составит длину полной окружности. Так как между двумя ближайшими соединениями тел протекает 56 мин., за которые первое тело проходит $56x$ *м*, а второе $56y$ *м*, то длина окружности равна $56x - 56y$.

Пусть теперь тела движутся в противоположных направлениях. Тогда пути, пройдённые ими за время, протекающее между двумя ближайшими встречами, т. е. за 8 мин., в сумме составят длину окружности. Следовательно, длина окружности равна $8x + 8y$. Имеем уравнение $56x - 56y = 8x + 8y$.

В условии задачи сказано далее, что за 24 сек. расстояние между ними уменьшилось на $40 - 26 = 14$ (*м*). За эти 24 сек. тела не встречались; поэтому уменьшение расстояния равно сумме путей, пройдённых телами за 24 сек. $= \frac{2}{5}$ мин. Получаем второе уравнение

$$\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 14.$$

Отв. 20 *м/мин*; 15 *м/мин*; 280 *м*.

449. Пусть x и y — положительные числа, выражающие скорости точек в соответствующих единицах (если c — длина окружности в метрах, то единица скорости 1 *м/сек* и т. п.; в задаче не указано, в каких единицах измеряется длина). Положим, что $x > y$. Тогда имеем систему уравнений:

$$tx - ty = c; \quad \frac{c}{y} - \frac{c}{x} = n$$

(вывод первого уравнения см. в предыдущей задаче). Подстановкой находим уравнение

$$nty^2 + ncy - c^2 = 0.$$

Его положительный корень $y=\frac{c(\sqrt{n^2+4nt}-n)}{2nt}$ (второй корень отрицательный).

Отв. Бо́льшая скорость численно равна $\frac{c(\sqrt{n^2+4nt}+n)}{2nt}$, меньшая скорость $\frac{c(\sqrt{n^2+4nt}-n)}{2nt}$.

450. Пусть скорость парохода в стоячей воде *x км/час*. Имеем уравнение $\frac{80}{x+4}+\frac{80}{x-4}=8\frac{1}{3}$.

Отв. 20 *км/час.*

451. *Отв.* 9 *км/час.*

452. Пусть скорость течения *x км/час*, а скорость лодки в стоячей воде *y км/час*. Первое условие даёт уравнение $\frac{20}{y+x}+\frac{20}{y-x}=10$, второе условие — уравнение $\frac{2}{y-x}=$ $=\frac{3}{y+x}$. Для решения этой системы удобно положить

$$\frac{1}{y+x}=u; \quad \frac{1}{y-x}=v.$$

Решая систему

$$20u+20v=10; \quad 2v=3u,$$

находим

$$u=\frac{1}{5}; \; v=\frac{3}{10}, \text{ т. е. } y+x=5; \quad y-x=\frac{10}{3},$$

откуда $x=\frac{5}{6}$.

Отв. $\frac{5}{6}$ *км/час.*

453. Пусть плот проплывает расстояние *a км* от Киева до Днепропетровска за *x* суток. Тогда его скорость, равная скорости течения Днепра, есть $\frac{a}{x}$ *км/сутки*. По условию скорость парохода, идущего по течению, равна $\frac{a}{2}$ *км/сутки*.

Следовательно, скорость парохода в стоячей воде будет $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{x}\right)$ *км/сутки*. А так как скорость движения парохода против течения составляет $\frac{a}{3}$ *км/сутки*, то скорость его в стоячей воде равна $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{x}\right)$ *км/сутки*. Имеем уравнение

$$\frac{a}{2}-\frac{a}{x}=\frac{a}{3}+\frac{a}{x}.$$

Отв. 12 суток.

454. Пусть скорость первого тела x *м/сек*, а второго — y *м/сек*. Первая встреча происходит при движении первого тела от A к B (через 10 сек. после выхода второго тела, т. е. через $10+11=21$ сек. после выхода первого тела). Получаем уравнение $21x+10y=301$. Вторая встреча происходит при обратном движении первого тела (через 45 сек. после выхода второго тела, т. е. через 56 сек. после выхода первого тела). Если C есть пункт второй встречи, то первое тело проходит расстояние $AB+BC$, а второе — расстояние BC. Разность этих расстояний есть $AB=301$ *м*. Имеем второе уравнение $56x-45y=301$.

Отв. Скорость первого тела 11 *м/сек*, второго — 7 *м/сек*.

455. Пусть скорость при движении в гору x *км/час*, по ровному месту — y *км/час* и под гору — z *км/час*. Вернувшись обратно с полпути, посыльный прошёл $14:2=7$ *км*; 3 *км* он шёл в гору, 4 *км* — по ровному месту, потом (на обратном пути) ещё 4 *км* по ровному месту и, наконец, 3 *км* под гору. По условию

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z}=3\frac{3}{5}, \text{ т. е. } \frac{3}{x}+\frac{8}{y}+\frac{3}{z}=3\frac{3}{5}.$$

Два других условия дают:

$$\frac{3}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=3\frac{9}{20}, \quad \frac{6}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=3\frac{17}{20}.$$

Находим $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, а затем x, y, z.

Отв. В гору 3 *км/час*; по ровному месту 4 *км/час*; под гору 5 *км/час*.

456. Пусть норма x листов в день и срок y дней. Тогда по условию

$$(x+2)(y-3)=xy \text{ и } (x+4)(y-5)=xy.$$

Отв. 120 листов, 15 дней.

457. Пусть рабочий сделал x деталей в y дней. Тогда ежедневно он изготовлял $\frac{x}{y}$ деталей. По условию, если бы он ежедневно изготовлял $\frac{x}{y}+10$ деталей, он выполнил бы работу за $y-4\frac{1}{2}$ дня. Значит, $\left(\frac{x}{y}+10\right)\left(y-4\frac{1}{2}\right)=x$. Другое условие даёт уравнение $\left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3)=x$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 10y-4\frac{1}{2}\frac{x}{y}=45, \\ -5y+3\frac{x}{y}=15. \end{cases}$$

Помножаем второе уравнение на 2 и складываем с первым; получаем $\frac{x}{y}=50$. Подставляя это значение во второе уравнение, находим $y=27$. Следовательно, $x=50y=1350$.

Замечание. Эту задачу можно решить как предыдущую, если вместо неизвестного x ввести величину z — число деталей, изготовляемых в день. Получилась бы та же система уравнений, где величина $\frac{x}{y}$ была бы заменена через z.

Отв. Рабочий сделал 1350 деталей ва 27 дней.

458. Пусть ежедневная норма машинистки x листов, а срок окончания работы y дней; тогда работа содержит xy листов. По условию, вырабатывая в день $x+2$ листа, машинистка затратит $y-2$ дня. Значит, работа содержит $(x+2)(y-2)$ листов. Следовательно,

$$(x+2)(y-2)=xy.$$

Таким же образом получаем другое уравнение

$$(x+0{,}60x)(y-4)=xy+8.$$

Отв. Норма 10 листов в день; срок исполнения 12 дней.

459. Пусть первый рабочий выполняет работу в x час. Тогда имеем уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}=\frac{1}{8}$.

Отв. Первый рабочий может выполнить всю работу в 12 час., второй — в 24 часа.

460. Если первая труба наполняет бассейн в x час., то вторая наполняет его в $(x+5)$ час. Условие задачи даёт уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}.$$

Отв. Первая труба наполняет бассейн за 10 час., вторая — за 15 час.

461. Пусть, работая отдельно, первый может выполнить работу за x час., а второй — за y час. Тогда в один час первый выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а второй $\frac{1}{y}$ часть. По условию $7\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=\frac{5}{9}$. После совместной четырёхчасовой работы первый отработал $7+4=11$ час., а второй $4+4=8$ час. По условию оба вместе выполнили $1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$ всей работы. Следовательно, $11\cdot\frac{1}{x}+8\cdot\frac{1}{y}=\frac{17}{18}$. Помножая первое уравнение на 2 и вычитая из второго, находим $3\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{18}$, откуда $x=18$. Затем находим $\frac{1}{y}=\frac{1}{24}$, откуда $y=24$.

Отв. Первый мог бы выполнить работу за 18, второй — за 24 часа.

462. Обозначим искомые числа через x и y. Четыре крана большей мощности работали $2+3=5$ час.; два крана меньшей мощности работали 3 часа. Поэтому (см. решение предыдущей задачи)

$$4\cdot 5\cdot\frac{1}{x}+2\cdot 3\cdot\frac{1}{y}=1.$$

Второе условие даёт

$$4\cdot 4{,}5\cdot\frac{1}{x}+2\cdot 4{,}5\cdot\frac{1}{y}=1.$$

Отв. В 24 часа; в 36 часов.

463. Пусть трехтонная машина может перевезти груз за x час., а пятитонная — за y час. По условию (см. решение задач **461—462**)

$$30 \cdot 8 \cdot \frac{1}{x} + 9 \cdot 6 \cdot \frac{1}{y} = 1 \quad \text{и} \quad 9 \cdot 8 \cdot \frac{1}{y} + 30 \cdot 6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{13}{15}.$$

Отв. $x = 300$; $y = 270$; 30 пятитонных машин перевезут груз за $270 : 30 = 9$ час.

464. Пусть первой машинистке для выполнения всей работы требуется x час., а второй — y час. Когда первая проработала 3 часа, вторая проработала 2 часа. Обе они выполнили $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ всей работы. Получаем уравнение

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20}.$$

По окончании работы машинистки сделали поровну, т. е. каждая сделала половину работы. Значит, первая потратила $\frac{x}{2}$ час., а вторая $\frac{y}{2}$ час. А так как первая работала на час дольше, чем вторая, то

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1.$$

Система имеет два решения, но одно не годится, так как даёт для y отрицательное значение.

Отв. Первая машинистка в 10 час., вторая в 8 час.

465. Задача сходна с предыдущей. Получаем уравнения

$$\frac{2}{x} + \frac{1{,}5}{y} = \frac{11}{30}; \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2},$$

где x и y — продолжительность пробега поездов (в часах). Из двух решений системы годится одно.

Отв. 10 час.; 9 час.

466. Пусть в одну минуту через первый кран поступает x *л*, а из второго вытекает y *л*. По условию полная ванна, вмещающая $2 \times 9 \times 2{,}5 = 45$ *л*, при действии обоих кранов опорожняется в 1 час. Значит, в 1 мин. количество воды уменьшается на $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ *л*. Следовательно, $y - x = \frac{3}{4}$. С дру-

гой стороны, через один первый кран ванна наполняется за $\frac{45}{x}$ мин., а через один второй она опорожняется за $\frac{45}{y}$ мин. По условию

$$\frac{45}{x}-\frac{45}{y}=5.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} y-x=\frac{3}{4}, \\ \frac{45}{x}-\frac{45}{y}=5 \end{cases}$$

имеет два решения $\left(x_1=2\frac{1}{4};\, y_1=3 \text{ и } x_2=-3;\, y_2=-2\frac{1}{4}\right)$. Второе решение не годится (x и y должны быть положительными числами).

Отв. $2\frac{1}{4}$ *л/мин*; 3 *л/мин.*

467. Пусть срок окончания есть x дней; тогда суточный план $\frac{8000}{x}$ кубометров. Бригада работала $x-8$ дней; значит, ежедневно вынималось $\frac{8000}{x-8}$ кубометров. По условию $\frac{8000}{x-8}-\frac{8000}{x}=50$. Из двух корней этого уравнения ($x_1=40$ и $x_2=-32$) годится только положительный $x=40$. Значит, суточный план составлял $\frac{8000}{x}=200$ кубометров; перевыполнение плана на 50 $м^3$ составляло

$$\frac{50\cdot 100}{200}=25\%.$$

Отв. Срок окончания 40 дней; процент перевыполнения 25.

468. Пусть первая бригада ремонтировала x *км* в день; тогда вторая ремонтировала $(4,5-x)$ *км* в день. Первая бригада работала $\frac{10}{x}$ дней; вторая $\frac{10}{4,5-x}$ дней. По условию $\frac{10}{x}-\frac{10}{4,5-x}=1$. Уравнение имеет корни $x_1=2$ и $x_2=22,5$. Второй не годится, так как по смыслу задачи число $4,5-x$ должно быть положительным.

Отв. Первая бригада ремонтировала 2 *км*, а вторая 2,5 *км* пути в день.

469. Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за x час., а второй — за y час. Значит, половину работы первый сделал за $\frac{x}{2}$ час.; остальную часть (т. е. тоже половину) второй сделает за $\frac{y}{2}$ час. По условию $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25$. Другое условие (см. решение задачи **461**) даёт $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$.

Отв. Один из рабочих (либо 1-й, либо 2-й) может выполнить работу в 20 час., другой — в 30 час.

470. Пусть один трактор может вспахать поле за x дней, а другой — за y дней. Имеем (ср. предыдущую задачу) систему уравнений:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{t}; \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=k.$$

Её можно заменить системой $x+y=2k$; $xy=2kt$.

Отв. Один из тракторов за $(k+\sqrt{k^2-2kt})$ дней; другой — за $(k-\sqrt{k^2-2kt})$ дней. Задача возможна при $\frac{k}{2}>t$.

471. Пусть все три землечерпалки, работая вместе, могут выполнить работу в x дней. Тогда одна первая может выполнить работу в $(x+10)$ дней, одна вторая — в $(x+20)$ дней и одна третья — в $6x$ дней. В один день первая машина выполнит $\frac{1}{x+10}$ часть работы, одна вторая $\frac{1}{x+20}$ часть, третья $\frac{1}{6x}$ часть, а все вместе $\frac{1}{x}$ часть работы. Имеем уравнение

$$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+20}+\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}.$$

Отв. Работа может быть выполнена первой землечерпалкой в 20 дней, второй — в 30 дней и третьей — в 60 дней.

472. Если второй рабочий может выполнить работу за x дней, то первый — за $(x+3)$ дня. Первый рабочий, проработав 7 дней, выполнит $\frac{7}{x+3}$ всей работы; второй, проработав $7-1\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$ дней, выполнит $\frac{5\frac{1}{2}}{x}$ всей работы.

Получаем уравнение

$$\frac{7}{x+3}+\frac{5\frac{1}{2}}{x}=1.$$

Отв. Первый рабочий выполнит всю работу за 14 дней, второй — за 11 дней.

473. Пусть первым трактором можно вспахать всё поле за x дней, вторым — за y дней. Первое условие даёт

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}.$$

Первый трактор может вспахать половину поля за $\frac{1}{2}x$ дней. По условию другая половина может быть вспахана двумя тракторами за $\left(10-\frac{1}{2}x\right)$ дней. Отсюда получаем второе уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\frac{1}{2}}{10-\frac{1}{2}x}.$$

Сравнивая два найденных уравнения, получаем

$$\frac{\frac{1}{2}}{10-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{8}.$$

Отсюда $x=12$; подставляя в первое уравнение, находим $y=24$.

Отв. Первым трактором можно вспахать поле за 12 дней, вторым — за 24 дня.

474. Так как рабочие приступали к работе через равные промежутки, и вследствие этого первый проработал в 5 раз больше времени, чем последний, то число рабочих было равно 5. Если последний работал x час., то общее число человеко-часов было $x+2x+3x+4x+5x=15x$. По условию, работая впятером, они могли бы выполнить ту же работу в 6 час. Следовательно, $15x=5\cdot 6$, откуда $x=2$. Работа по прорытию канавы продолжалась столько времени, сколько работал первый рабочий, т. е. $5x$ час.

Отв. Работа продолжалась 10 час.

475. Пусть первый рабочий может выполнить работу за x час.; получаем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{t}.$$

Отв. $x=\frac{1}{4}(5t-2+\sqrt{25t^2+4t+4})$.

476. Пусть первый кран наполняет бассейн за x час., а второй — за y час. За 1 час первый кран наполнит $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а по условию он был открыт $\left(\frac{1}{3}y\right)$ час., значит, вода из первого крана заполнила $\frac{\frac{1}{3}y}{x}$ часть бассейна. Аналогично найдём, что вода из второго крана заполнила $\frac{\frac{1}{3}x}{y}$ часть бассейна. Так как после этого заполнилось $\frac{13}{18}$ бассейна, то

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{x}+\frac{1}{3}\frac{x}{y}=\frac{13}{18}.$$

Второе условие даёт уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}.$$

Эту систему можно решить следующим образом. Если положить $\frac{y}{x}=z$, то первое уравнение примет вид

$$\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}=\frac{13}{18}.$$

Отсюда $z_1=\frac{3}{2}$; $z_2=\frac{2}{3}$. Второе уравнение представим в виде

$$\frac{y}{x}+1=\frac{5}{18}y.$$

Подставляя сюда $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$, найдём $y=9$; значит, $x=\frac{2}{3}y=6$. Подставляя $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$, найдём $y=6$ и $x=9$.

Отв. Один из кранов наполняет бассейн за 6 час., другой — за 9 час.

477. Если норма ежедневной кладки была x тысяч штук, а в действительности укладывали y тысяч штук в день, то будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 4, \\ 3y - 4x = 5. \end{cases}$$

Отв. Норма в день 10 тысяч кирпичей; в действительности укладывали 15 тысяч кирпичей.

478. В следующей таблице даны последовательные количества воды (в литрах) в трёх сосудах (I, II, III):

I	x;	$\frac{2}{3}x$;	$\frac{2}{3}x$;	$\frac{1}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z\right]+\frac{2}{3}x$;
II	y	$\frac{1}{3}x+y$;	$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)$;	$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)$;
III	z;	z;	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z$;	$\frac{9}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z\right]$.

Каждое из выражений последнего столбца по условию равно 9.

Отв. 12 *л*, 8 *л*, 7 *л*.

479. Если первый раз вылили x *л* спирта, то осталось $(64-x)$ *л* спирта; второй раз было отлито $\frac{64-x}{64}x$ *л* чистого спирта. Осталось

$$64 - x - \frac{64-x}{64}x = \frac{1}{64}(64-x)^2 \text{ л}$$

чистого спирта. Получаем уравнение

$$\frac{1}{64}(64-x)^2 = 49.$$

Отв. Первый раз вылили 8 *л* спирта, второй раз 7 *л*.

480. Перелив x *л* спирта и дополнив второй сосуд водой, будем иметь во втором сосуде $\frac{x}{20}$ *л* спирта на каждый литр смеси. Обратно переливается x *л* смеси; в них содержится $\frac{x}{20}x = \frac{x^2}{20}$ *л* спирта. После обратного переливания количество спирта в первом сосуде составляет $\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$ *л*. Теперь из первого сосуда отливается $6^2/_3$ *л* смеси, т. е.

$\frac{6^2/_3}{20}$ составляет $\frac{1}{3}$ всего количества этой смеси. Вместе с тем на $\frac{1}{3}$ уменьшается и количество спирта, т. е. в первом сосуде остаётся $\frac{2}{3}\left(20-x+\frac{x^2}{20}\right)$ *л* спирта. Так как количество спирта в обоих сосудах неизменно равняется 20 *л*, а по условию в обоих сосудах теперь содержится одинаковое количество спирта (т. е. по 10 *л*), то

$$\frac{2}{3}\left(20-x+\frac{x^2}{20}\right)=10.$$

Отв. 10 *л*.

481. Пусть из сосуда выпущено x *л* воздуха и введено такое же количество азота. В оставшемся количестве $(8-x)$ *л* воздуха содержится $(8-x)\,0{,}16$ *л* кислорода. Это количество приходится на 8 *л* смеси, так что на 1 *л* приходится $\frac{(8-x)\,0{,}16}{8}$ *л* кислорода. Следовательно, когда вторично x *л* смеси заменяется x *л* азота, остающееся количество $(8-x)$ *л* смеси содержит $\frac{(8-x)\,0{,}16}{8}\cdot(8-x)=(8-x)^2\cdot 0{,}02$ *л* кислорода. Значит, по отношению к общему количеству смеси (8 *л*) содержание кислорода составляет $\frac{(8-x)^2\,0{,}02}{8}\cdot 100=\frac{(8-x)^2}{4}$. По условию $\frac{(8-x)^2}{4}=9$. Из двух корней $(x_1=2,\ x_2=14)$ годится только первый, так как больше 8 *л* выпустить нельзя.

Отв. 2 *л*.

482. Пусть у первой колхозницы было x яиц, а у второй y яиц. Если бы первая продала y яиц, то, по условию, выручила бы 72 руб. Следовательно, она продавала яйца по $\frac{72}{y}$ руб. за штуку и выручила $\frac{72}{y}x$ руб. Таким же образом найдём, что вторая выручила $\frac{32}{x}y$ руб. Имеем два уравнения:

$$\frac{32}{x}y=\frac{72}{y}x;\quad x+y=100.$$

Из первого находим $\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{72}{32}$, откуда $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$ (отрицательное значение $\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}$ не годится).

Отв. У первой было 40 яиц, у второй 60 яиц.

483. При обозначениях предыдущей задачи получаем систему

$$m\frac{x}{y}=n\frac{y}{x};\quad x+y=a.$$

Из первого уравнения находим $x:y=\sqrt{n}:\sqrt{m}$. Делим затем a на части, пропорциональные $\sqrt{n}$ и $\sqrt{m}$.

Отв. У первой $\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ *л*, у второй $\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ *л*.

484. Пусть первый двигатель расходует в 1 час x *г* бензина, а второй — y *г*; тогда 600 *г* бензина первый израсходовал за $\frac{600}{x}$ час., а 384 *г* бензина второй израсходовал за $\frac{384}{y}$ час. По условию $\frac{600}{x}-\frac{384}{y}=2$. Если бы первый расходовал в 1 час y *г* бензина, то за $\frac{600}{x}$ час. расход бензина был бы $\frac{600}{x}\cdot y$ *г*, а если бы второй расходовал в 1 час x *г*, то за $\frac{384}{y}$ час. он израсходовал бы $\frac{384}{y}\cdot x$ *г*; по условию $\frac{600y}{x}=\frac{384x}{y}$.

Отв. Первый расходует 60 *г/час*, второй — 48 *г/час*.

485. В x *кг* первого сплава содержится $\frac{2}{5}x$ *кг* золота и $\frac{3}{5}x$ *кг* серебра. В $(8-x)$ *кг* второго сплава содержится $\frac{3}{10}(8-x)$ *кг* золота и $\frac{7}{10}(8-x)$ *кг* серебра. Получаем уравнение

$$\left[\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)\right]:\left[\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}(8-x)\right]=5:11.$$

Отв. 1 *кг* первого сплава и 7 *кг* второго.

486. См. решение предыдущей задачи.

Отв. 9 вёдер из первой бочки и 3 ведра из второй.

487. Пусть третий сплав содержит x частей первого и y частей второго сплава, т. е. на x *кг* первого сплава приходится y *кг* второго сплава. Тогда в $(x+y)$ *кг* третьего сплава содержится $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$ *кг* первого металла и $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)$ *кг* второго металла. По условию

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)=17:27.$$

Приведя делимое и делитель к общему знаменателю (15) и деля их на y, получим

$$\left(5\frac{x}{y}+6\right):\left(10\cdot\frac{x}{y}+9\right)=17:27,$$

откуда $\frac{x}{y}=\frac{9}{35}$.

Отв. На 9 частей первого сплава нужно взять 35 частей второго сплава.

488. Пусть в 1 мин. большее колесо делает x оборотов, а меньшее — y оборотов, $y>x$. Имеем уравнения

$$y-x=400;\quad \frac{5}{x}-\frac{5}{y}=\frac{1}{60}.$$

Второе уравнение можно представить в виде $xy=300(y-x)$, т. е. $xy=120\,000$.

Отв. Большее колесо делает 200 оборотов в минуту, меньшее — 600 оборотов.

489. Пусть окружность переднего колеса равна x *дм*, а окружность заднего — y *дм*. Имеем два уравнения:

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{y}=10 \text{ и } \frac{180}{x+6}-\frac{180}{y-6}=4.$$

Первое преобразуется к виду $18(y-x)=xy$; второе — к виду $39(y-x)=xy+504$. Из этих двух уравнений найдём $y-x=24$; $xy=432$.

Отв. Окружность переднего колеса 12 *дм*, заднего — 36 *дм*.

490. В первый и третий дни было выгружено $600 \cdot \frac{2}{3} = 400$ *т*; во второй день выгружено 600 *т* — 400 *т* = 200 *т*. Пусть в первый день выгружено x *т*; тогда в третий день выгружено $(400 - x)$ *т*. Уменьшение выгрузки во второй день по сравнению с первым днём было $(x - 200)$ *т*, что составляло $\frac{(x-200)\,100}{x}\,\%$ от выгрузки первого дня. Уменьшение выгрузки в третий день по сравнению со вторым днем было $200 - (400 - x) = (x - 200)$ *т*, что составляло $\frac{(x-200)\,100}{200}\,\%$ или $\frac{x-200}{2}\,\%$ выгрузки второго дня. По условию

$$\frac{x-200}{2} - \frac{(x-200)\,100}{x} = 5.$$

Найдём два корня $x_1 = 250$; $x_2 = 160$. Второй корень не годится, так как по условию выгрузка с каждым днем уменьшалась, между тем как при $x = 160$ выгрузка составляла бы: в первый день 160 *т*, во второй 200 *т* и в третий 240 *т*.

Отв. В первый день было выгружено 250 *т*, во второй 200 *т*, в третий 150 *т*.

491. Пусть первый раствор весит x *кг*, тогда второй весит $(10 - x)$ *кг*. Процентное содержание безводной серной кислоты в первом растворе $\frac{0{,}8 \cdot 100}{x} = \frac{80}{x}$, а во втором $\frac{0{,}6 \cdot 100}{10 - x} = \frac{60}{10 - x}$. По условию

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10-x} = 10.$$

Уравнение имеет два положительных корня $x_1 = 20$ и $x_2 = 4$. Так как по условию $x < 10$, то первое решение не годится.

Отв. 4 *кг* и 6 *кг*.

492. Если в первом сплаве было $x\%$ меди, то во втором было $(x + 40)\%$. Первый сплав весил $\frac{6 \cdot 100}{x}$ *кг*, а второй — $\frac{12 \cdot 100}{x + 40}$ *кг*. Получаем уравнение $\frac{600}{x} + \frac{1200}{x + 40} = 50$.

Отв. 20% и 60%.

493. Пусть скорость товарного поезда x *м/сек*, а пассажирского y *м/сек*. За 28 сек. товарный поезд прошёл 28 x(*м*), а пассажирский 28 y(*м*); получаем уравнение

$$28x+28y=700.$$

Товарный поезд идёт мимо светофора $\frac{490}{x}$ сек., а пассажирский $\frac{210}{y}$ сек. Получаем второе уравнение

$$\frac{490}{x}-\frac{210}{y}=35.$$

Отв. Скорость товарного поезда 10 *м/сек*, т. е. 36 *км/час*, пассажирского — 15 *м/сек*, т. е. 54 *км/час*.

494. Если число четырёхосных цистерн равно x, то число двухосных равно $(x+5)$. Если одна двухосная цистерна весит y *т*, то одна четырёхосная весит 3 y *т*. Вес нефти в двухосной цистерне равен $(40\cdot 0{,}3)$ *т* $=12$ *т*. Четырёхосная цистерна с нефтью весит $(3y+40)$ *т*, а двухосная $(y+12)$ *т*. Имеем первое уравнение

$$x(3y+40)+(x+5)(y+12)=940.$$

Вес нефти во всех четырёхосных цистернах $(40\,x)$ *т*, а вес всех гружёных двухосных $(x+5)(y+12)$ *т*. Имеем второе уравнение

$$40x-(x+5)(y+12)=100.$$

Отв. Четырёхосных цистерн было 10, весом каждая по 24 *т*, двухосных цистерн было 15, весом каждая по 8 *т*.

495. Пусть первая машина проходит в день x *м*, а вторая y *м*. В первом случае первая машина выполнила бы 30% всей работы, т. е. прошла бы $\frac{60x\cdot 30}{100}=18x$ (*м*), а вторая $\frac{60\cdot y\cdot 80}{300}=16y$ (*м*).

Имеем уравнение

$$18x+16y=60.$$

Во втором случае первая машина прошла бы $\frac{2}{3}\cdot 60y$ (*м*), затратив на это $\frac{2}{3}\cdot 60\cdot\frac{y}{x}$ дней. Вторая машина затратила бы

$\frac{3}{10} \cdot 60 \cdot \frac{x}{y}$ дней. Имеем второе уравнение

$$\frac{40y}{x} - \frac{18x}{y} = 6.$$

Полученная система легко решается, если положить $\frac{y}{x} = z$. К задаче подходит положительное значение $z = \frac{3}{4}$.

Отв. Первая машина проходит в день 2 *м* тоннеля;
вторая » » » » $1\frac{1}{2}$ *м* » .

496. Пусть первая бригада может отремонтировать участок пути в x дней, а вторая — в y дней. По условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ \frac{40x}{100} - \frac{40y}{300} = 2. \end{cases}$$

Отв. Первая бригада может отремонтировать участок в 10 дней, вторая — в 15 дней.

497. Пусть первая часть груза (составляющая $\frac{25}{46} \cdot 690 = 375$ *т*) была перевезена за x час., и каждая трёхтонная машина делала y поездок в час. Тогда каждая полуторатонная машина делала $(y+1)$ поездку в час. По условию вторая часть груза (т. е. $690 - 375 = 315$ *т*) была перевезена за $(x-2)$ часа, причём трехтонные машины делали по $(y+1)$ поездок в час, а полуторатонные — по $(y+1)+1=(y+2)$ поездок. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 3xy + 10 \cdot 1\frac{1}{2}x(y+1) = 375, \\ 5 \cdot 3(x-2)(y+1) + 10 \cdot 1\frac{1}{2}(x-2)(y+2) = 315. \end{cases}$$

После упрощений эти уравнения примут вид

$$\begin{cases} 2xy + x = 25, \\ 2xy + 3x - 4y = 27. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим $2x - 4y = 2$. Отсюда $2y = x - 1$. Подставляя в первое уравнение,

получим $x^2 = 25$, т. е. $x = 5$. Первая часть груза была перевезена за 5 час., вторая — за $5 - 2 = 3$ часа.

Отв. Груз перевезён за 8 час.; трёхтонные машины вначале делали по 2 поездки в час; полуторатонные — по 3 поездки в час.

498. Если x — ширина дорожки, то площадка вместе с дорожкой содержит $(a+2x)(b+2x)$ *м*². Имеем уравнение $(a+2x)(b+2x) = 2ab$.

Отв. $\frac{1}{4}[\sqrt{(a+b)^2+4ab} - (a+b)]$.

499. Число стульев в каждом ряду обозначим через x; тогда число рядов равно $\frac{a}{x}$. Получаем уравнение

$$(x+b)\left(\frac{a}{x} - c\right) = 1,1a.$$

После упрощений имеем:

$$10cx^2 + (a + 10bc)x - 10ab = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{-(a+10bc) \pm \sqrt{(a+10bc)^2 + 400abc}}{20c}.$$

Если радикал взять со знаком минус, то $x < 0$; если взять со знаком плюс, то $x > 0$.

Отв. Число стульев в каждом ряду

$$\frac{\sqrt{(a+10bc)^2+400abc} - (a+10bc)}{20c}.$$

500. Обозначим скорости тел (в *м/сек*) через v_1 и v_2; пусть $v_1 > v_2$. Первое условие даёт уравнение $av_1 + av_2 = d$; второе даёт уравнение $bv_1 - bv_2 = d$.

Отв. $v_1 = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$; $v_2 = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. Задача имеет решение только при $a < b$.

501. Обозначим скорость мотоциклиста (в *км/час*) через x, а велосипедиста — через y. Получаем систему уравнений

$$2x + 2y = d; \quad \frac{d}{y} - \frac{d}{x} = t.$$

Отв. Скорость мотоциклиста $d\frac{t-4+\sqrt{16+t^2}}{4t}$ *км/час*, скорость велосипедиста $d\frac{t+4-\sqrt{16+t^2}}{4t}$ *км/час*.

502. Если велосипедисту требуется x час., то пешеходу требуется $(x+c)$ час. Обозначим через y расстояние AB (скажем, в километрах). До места встречи пешеход прошёл $\frac{y(a+b)}{x+c}$ *км*, а велосипедист проехал $\frac{by}{x}$ *км*. Имеем уравнение $\frac{(a+b)y}{x+c}+\frac{by}{x}=y$. Так как $y\neq 0$, то $\frac{a+b}{x+c}+\frac{b}{x}=1$, или $x^2-(a+2b-c)x-bc=0$.

Это уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень (так как произведение корней равно отрицательному числу $-bc$). Годится только положительное решение

$$x=\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}.$$

Расстояние y остаётся неопределённым. Величину $x+c$ можно найти либо из вышеприведённого выражения, либо из уравнения $\frac{a+b}{x+c}+\frac{b}{x}=1$, положив $x+c=z$. Получим уравнение $\frac{a+b}{z}+\frac{b}{z-c}=1$. Берём только положительное решение.

Отв. Велосипедисту требуется

$$\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2} \text{ час.},$$

а пешеходу

$$\frac{a+2b+c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}=$$

$$=\frac{(a+2b+c)+\sqrt{(a+2b+c)^2-4(a+b)c}}{2} \text{ час.}$$

503. Обозначим длину пути (в километрах) через x. Согласно условию поезд A должен по расписанию нагнать поезд B через $\frac{x}{v}$ час. после выхода. Фактически он нагнал поезд B, пройдя $(x-a)$ *км*, т. е. через $\frac{x-a}{v}$ час. Следовательно, оба поезда шли до встречи на $\frac{a}{v}$ час. меньше положенного времени. Но поезд B должен был итти до встречи

$\frac{x}{v_1}$ час., фактически же он прошёл расстояние $\frac{2}{3}x$ со скоростью v_1 и расстояние $\frac{1}{3}x - a$ со скоростью $\frac{1}{2}v_1$, затратив на весь этот путь $\left(\frac{\frac{2}{3}x}{v_1} + \frac{\frac{1}{3}x - a}{\frac{1}{2}v_1}\right)$ час. Следовательно,

$$\frac{x}{v_1} - \left(\frac{\frac{2}{3}x}{v_1} + \frac{\frac{1}{3}x - a}{\frac{1}{2}v_1}\right) = \frac{a}{v}.$$

Отв. Длина пути равна $\frac{3a(2v - v_1)}{v}$ *км.* Задача имеет решение только при $v_1 < 2v$.

504. Пусть сберкасса даёт $x\%$. Тогда первоначально было положено $\frac{1500}{x}$ руб. В начале второго года на счету вкладчика было $\frac{1500}{x} + 15 + 85$, т. е. $\left(\frac{1500}{x} + 100\right)$ руб. В конце второго года эта сумма обратится в $\left(\frac{1500}{x} + 100\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ руб. Получаем уравнение

$$\left(\frac{1500}{x} + 100\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 420.$$

Отв. 300 руб.; 5%.

505. Обозначим производительность станков A, B, C соответственно через x, y, z. По условию

$$x = \frac{m}{100}(y + z), \quad y = \frac{n}{100}(x + z).$$

Найдём из этих уравнений выражения x и y через z; сложив их, получим

$$x + y = \frac{100(m + n) + 2mn}{10\,000 - mn} \cdot z.$$

Искомое число процентов равно $\frac{z}{x + y} \cdot 100$.

Отв. $100 \cdot \frac{10\,000 - mn}{100(m + n) + 2mn}$.

506. Примем за единицу измерения продукцию года, предшествующего первому. Тогда продукция 1-го года составит $1+\frac{p}{100}$. По сравнению с ней продукция 2-го года возрастает на $q\%$, т. е. на $\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}$ и составит

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)+\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}=\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right).$$

Если продукция 3-го года возрастает на $x\%$, то она увеличивается на $\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)\frac{x}{100}$.

По условию

$$\frac{1}{3}\left[\frac{p}{100}+\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}+\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)\frac{x}{100}\right]=\frac{r}{100}.$$

Отв. $\dfrac{3r-p-q-\frac{pq}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)}\,\%$.

507. Пусть себестоимость всего товара составляет m руб. Тогда себестоимость первой проданной партии составляет $a\%$ от m, т. е. $\frac{ma}{100}$ руб. По условию полученная от продажи прибыль составляет $p\%$ этой суммы, т. е. $\frac{ma}{100}\cdot\frac{p}{100}$ руб.

Себестоимость товара, оставшегося после продажи первой партии, равна $m-\frac{ma}{100}=m\left(1-\frac{a}{100}\right)$ руб. Себестоимость второй проданной партии составляет $b\%$ от этой суммы, т. е. $m\left(1-\frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}$ руб. При продаже второй партии было получено $q\%$ прибыли; следовательно, эта прибыль составляет $m\left(1-\frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100}$ руб.

Себестоимость товара, оставшегося после второй продажи, составляет

$$m-\frac{ma}{100}-m\left(1-\frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}=m\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right) \text{ руб.}$$

Пусть эта остальная часть продана с прибылью $x\%$. Тогда прибыль от её продажи составит $m\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}$ руб.

Общая прибыль будет

$$m\left[\frac{a}{100}\cdot\frac{p}{100}+\left(1-\frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100}+\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}\right].$$

По условию общая прибыль должна составить $r\%$ от m руб., т. е. $\frac{mr}{100}$ руб. Следовательно,

$$m\left[\frac{a}{100}\cdot\frac{p}{100}+\left(1-\frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100}+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}\right]=\frac{mr}{100}.$$

Величина m сокращается.

Отв. $\dfrac{r-\frac{ap}{100}-\frac{bq}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)}{\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)}\%$.

508. Первый способ. Положим, что каждый из отрезанных кусков весил x *кг*. Для краткости назовём первый сплав (весом m *кг*) «сплавом A», а второй — «сплавом B». Из двух вновь полученных слитков первый содержит $(m-x)$ *кг* сплава A и x *кг* сплава B, а второй — x *кг* сплава A и $(n-x)$ *кг* сплава B. По условию процентное содержание меди в обоих слитках одинаково. А это возможно лишь в том случае, когда в двух слитках количества сплава A и сплава B пропорциональны. Получаем уравнение

$$\frac{m-x}{x}=\frac{x}{n-x},$$

откуда

$$x=\frac{mn}{m+n}.$$

Второй способ. Пусть u *кг* есть вес меди в 1 *кг* сплава A, а v — вес меди в 1 *кг* сплава B. Тогда в первом слитке $(m-x)u+xv$ *кг* меди, т. е. на 1 *кг* первого слитка приходится $\frac{(m-x)u+xv}{m}$ *кг* меди. Аналогично выразится вес меди, приходящийся на 1 *кг* второго слитка. Приравнивая два найденных выражения, получим уравнение

$$n[(m-x)u+xv]=m[(n-x)v+xu],$$

содержащее три неизвестных x, u, v. Его можно представить в виде

$$(u-v)(mx+nx-mn)=0.$$

По условию сплавы A и B имеют различные процентные содержания меди, т. е. величина $u-v$ не может равняться нулю. Следовательно,

$$mx+nx-mn=0.$$

Отв. Каждый кусок весил $\frac{mn}{m+n}$ *кг.*

509. Пусть в первой кучке первоначально было x_1 руб., во второй было x_2 руб. и т. д.; в последней (n-й) кучке первоначально было x_n руб. Первая кучка явно находится в особом положении, так как из неё сначала изымается $\frac{1}{n}$ часть и лишь в конце процесса она пополняется из n-й кучки, тогда как по отношению к каждой из остальных сначала производится пополнение из предыдущей кучки, а затем изъятие $\frac{1}{n}$ части. Поэтому рассмотрим какую-либо кучку, кроме первой. Обозначим её номер через k. Первоначально в ней было x_k руб., к ней прибавилось некоторое количество y руб. из $(k-1)$-й кучки, а затем из общей суммы $y+x_k$ руб. была изъята $\frac{1}{n}$ часть. Осталось $(y+x_k)\frac{n-1}{n}$ руб. По условию имеем уравнение

$$(y+x_k)\frac{n-1}{n}=A. \qquad (1)$$

В предыдущей же $(k-1)$-й кучке, если она не была первой (т. е. если $k\neq 2$), должно было остаться A руб. (в первой кучке A руб. образуется лишь после пополнения её из n-й кучки). Значит, до изъятия y руб. в ней было $A+y$ руб. По условию изымаемая сумма y руб. составляет $\frac{1}{n}$ часть от $A+y$, т. е.

$$y=\frac{1}{n}(A+y). \qquad (2)$$

Отсюда находим $y=\frac{1}{n-1}A$. Подставляя в (1), получаем $x_k=A$. Таким образом, во всех кучках, кроме, может быть,

второй и первой (прежде исключённых из рассмотрения), первоначально было по A руб.;

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_n = A. \qquad (3)$$

Неизвестное x_1 можно найти так. По условию сначала из суммы x_1 руб. изымается $\frac{1}{n}$ часть. Остаётся $x_1 \frac{n-1}{n}$ руб. В конце процесса в первую кучку добавляется некоторая сумма y руб. из последней кучки. Получаем уравнение

$$y + x_1 \frac{n-1}{n} = A. \qquad (4)$$

Рассуждая (применительно к n-й кучке) так же, как выше, найдём, что $y = \frac{1}{n-1} A$. Подставив в (4), найдём:

$$x_1 = \frac{(n-2)\,n}{(n-1)^2} A. \qquad (5)$$

Для разыскания x_2 имеем уравнение

$$\left(\frac{1}{n} x_1 + x_2\right) \frac{n-1}{n} = A, \qquad (6)$$

где x_1 определяется формулой (5). Решая это уравнение, находим:

$$x_2 = \frac{n(n-1) - (n-2)}{(n-1)^2} A.$$

Отв.

$$x_1 = \frac{n^2 - 2n}{(n-1)^2} A; \quad x_2 = \frac{n^2 - 2n + 2}{(n-1)^2} A; \quad x_3 = x_4 = \ldots = x_n = A.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

ГЛАВА 8

ПЛАНИМЕТРИЯ

510. Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, а c — его гипотенуза. По условию $a+b+c=132$ и $a^2+b^2+c^2=6050$. Так как $a^2+b^2=c^2$, то $2c^2=6050$, откуда $c=\sqrt{3025}=55$. Поэтому $a+b=77$. Возводя это равенство в квадрат и учитывая соотношение $a^2+b^2=3025$, получим $ab=1452$. Следовательно, a и b суть корни уравнения

$$x^2-77x+1452=0.$$

Отв. Катеты треугольника равны 44 и 33, гипотенуза 55.

Черт. 1.

511. Высота BK (черт. 1) параллелограмма $ABCD$ равна $2ON=2p$. Так как $\angle BAK=\alpha$, то $AB=\frac{2p}{\sin\alpha}$. Аналогично $AD=\frac{2m}{\sin\alpha}$. Находим:

$$S=AD\cdot BK=\frac{4mp}{\sin\alpha}.$$

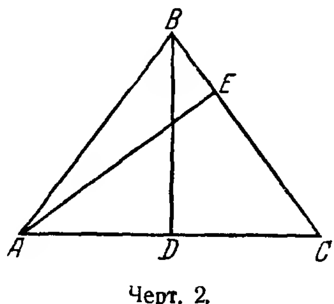
Диагонали находим по теореме косинусов.

Отв. $S=\frac{4mp}{\sin\alpha}$,

$$BD=\frac{2\sqrt{p^2+m^2-2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha},$$

$$AC=\frac{2\sqrt{p^2+m^2+2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

512. По условию $AC = 30$ *см* и $BD = 20$ *см* (черт. 2). Высоту AE можно найти из подобия прямоугольных треугольников BDC и AEC (у них угол C — общий), но проще



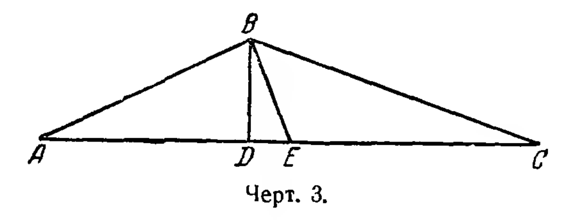
Черт. 2.

сравнить два выражения площади S треугольника ABC. Именно, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ и $S = \frac{1}{2} BC \cdot AE$. Следовательно,

$$AE = \frac{AC \cdot BD}{BC} = \frac{30 \cdot 20}{\sqrt{20^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2}} = 24 \text{ см.}$$

Отв. 24 *см.*

513. Из треугольника BDE, где $BD = 12$ *см* и $BE = 13$ *см*, находим $DE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (*см*) (черт. 3). Следовательно,



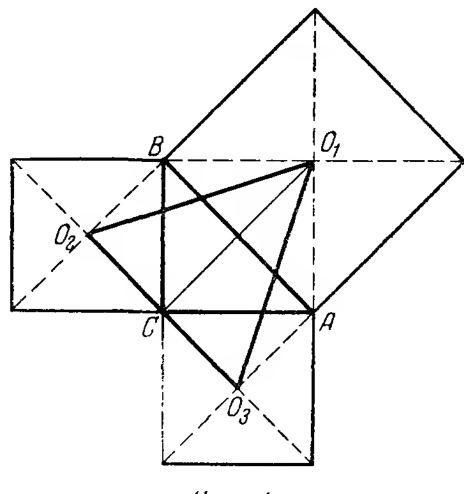
Черт. 3.

$AD = AE - DE = \frac{1}{2} AC - DE = \frac{1}{2} \cdot 60 - 5 = 25$ (*см*) и $DC = EC + DE = 35$ (*см*). Боковые стороны находим из треугольников ADB и DCB.

Отв. $AB = \sqrt{769} \approx 27{,}7$ *см*, $BC = \sqrt{1369} = 37$ *см.*

514. Пусть ABC есть данный треугольник ($AC = CB = b$). Требуется определить площадь S треугольника $O_1O_2O_3$ (черт. 4).

Имеем $S = \frac{1}{2} O_2O_3 \cdot O_1C$, где $O_2O_3 = AB$ и $O_1C = AB$. Следовательно, $S = \frac{1}{2} AB^2 = b^2$.



Черт. 4.

Другое решение. Треугольник O_1O_2C равновелик треугольнику O_1BC (у них общее основание O_1C и равные высоты). Треугольник O_1O_3C равновелик треугольнику O_1AC (по той же причине). Значит, треугольник $O_1O_2O_3$ равновелик квадрату O_1BCA.

Отв. $S = b^2$.

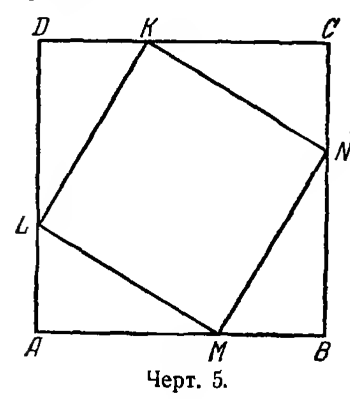
515. По условию задачи отрезок $AB = a$ делится точкой M в отношении $m : n$ (черт. 5). Поэтому $AM = \frac{ma}{m+n}$ и $MB = \frac{na}{m+n}$. Таким же образом

$$BN = CK = DL = \frac{ma}{m+n} \text{ и } NC = KD = LA = \frac{na}{m+n}.$$

Следовательно,

$$LM = MN = NK = KL =$$
$$= \sqrt{\frac{m^2a^2}{(m+n)^2} + \frac{n^2a^2}{(m+n)^2}} = \frac{a}{m+n}\sqrt{m^2+n^2}.$$

Кроме того, все углы четырёхугольника $LMNK$ прямые (ибо из равенства треугольников ALM и BMN имеем $\angle LMA = \angle MNB = 90° - \angle NMB$; следовательно, $\angle LMA + \angle NMB = 90°$; поэтому $\angle LMN = 90°$). Значит, четырёхугольник $LMNK$ есть квадрат и площадь S его равна



Черт. 5.

$$LM^2 = \frac{a^2(m^2+n^2)}{(m+n)^2}.$$

Отв. $S = \dfrac{a^2(m^2+n^2)}{(m+n)^2}$.

516. По условию $\angle LMA = 30°$ (черт. 5). Следовательно,

$$AL = \frac{1}{2}ML \text{ и } AM = \frac{\sqrt{3}}{2}ML.$$

Значит,

$$AB = AM + MB = AM + AL = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})ML.$$

Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD : \text{пл. } LMNK = AB^2 : ML^2 = (1+\sqrt{3})^2 : 4,$$

т. е.

$$\text{пл. } LMNK = \frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}\text{ пл. } ABCD.$$

Отв. Отношение равно $\dfrac{4}{(1+\sqrt{3})^2} = 2(2-\sqrt{3}) \approx 0,54$.

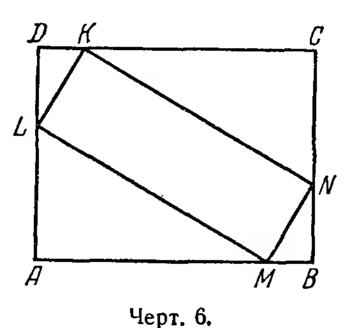
517. Обозначим AM (черт. 5) через x. Тогда $AL = MB = a - x$. Следовательно,

$$\text{пл. } KLMN = LM^2 = AL^2 + AM^2 = (a-x)^2 + x^2.$$

По условию $(a-x)^2 + x^2 = \frac{25}{49}a^2$. Решаем это уравнение.

Отв. Искомые отрезки равны $\frac{3a}{7}$ и $\frac{4a}{7}$.

518. Предварительное замечание. Из решения выяснится, как отыскать положение вершин вписанного прямоугольника $KLMN$ (черт. 6). Пока нужно выполнить построение схематически, начав с построения прямоугольника $KLMN$.



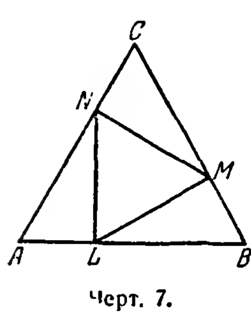
Черт. 6.

Решение. Найдём отрезки $MB = x$ и $BN = y$. Так как $AB = 4$, то $AM = 4 - x$. Треугольники DLK и BNM равны (доказать!); следовательно, $DL = BN = y$ и $LA = 3 - y$. Треугольники LAM и MNB подобны, ибо острые их углы ALM и NMB равны (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). А так как по условию ML втрое больше, чем MN, то и $LA = 3MB$, а также $AM = 3BN$, т. е. $3 - y = 3x$ и $4 - x = 3y$. Отсюда находим $x = \frac{5}{8}$, $y = \frac{9}{8}$. Теперь имеем

$$MN = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{106}}{8} \text{ и } ML = \frac{3\sqrt{106}}{8}.$$

Отв. Стороны прямоугольника равны $\frac{\sqrt{106}}{8} \approx 1{,}29$ *м* и $\frac{3\sqrt{106}}{8} \approx 3{,}87$ *м*.

519. Площадь равностороннего треугольника ABC (черт. 7) равна $\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Треугольник ANL, у которого по условию $AL=\frac{1}{3}a$ и $AN=\frac{2}{3}a$, имеет общий угол A с треугольником ABC. Значит, их площади относятся, как произведения сторон: $\frac{S_{ANL}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{3}a\cdot\frac{2}{3}a}{a\cdot a}$. Поэтому



Черт. 7.

$$S_{ANL}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC}=\frac{2}{9}S_{ABC}.$$

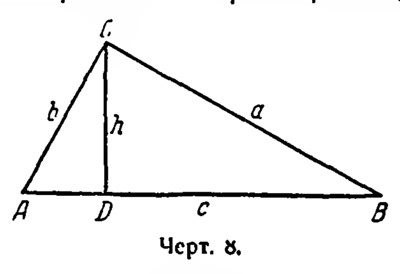
Следовательно,

$$S_{NLM}=S_{ABC}-3S_{ANL}=$$
$$=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Замечание. Треугольник LMN, равно как и треугольник ABC, равносторонний (доказать). Но тем же способом можно определить площадь треугольника LMN в общем случае, когда треугольник ABC произвольный и стороны его разделены в произвольных отношениях.

Отв. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

520. При обозначениях черт. 8 имеем $a+b+c=2p$. Отсюда $a+b=2p-c$ и $a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$. Но



Черт. 8.

$a^2+b^2=c^2$ и $ab=ch$ (см. решение задачи 512). Поэтому $c^2+2ch=4p^2-4pc+c^2$, откуда

$$c=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

Теперь имеем $a+b=\frac{2p(h+p)}{h+2p}$ и $ab=\frac{2p^2h}{h+2p}$. Следовательно, a и b суть корни уравнения

$$x^2-\frac{2p(h+p)}{h+2p}x+\frac{2p^2h}{h+2p}=0.$$

Отв. $c=\frac{2p^2}{h+2p}$,

$$a=\frac{p}{h+2p}\left[h+p+\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\right],$$

$$b=\frac{p}{h+2p}\left[h+p-\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\right].$$

Задача имеет решение лишь в том случае, если $p\geqslant h(\sqrt{2}+1)$.

521. Каждая из боковых сторон AC и BC (черт. 9) треугольника ABC равна $\frac{2P-2a}{2}=P-a$. Пусть x есть длина отрезка CM $(x=CM=CN)$. Периметр $2p$ трапеции $AMNB$ получится из периметра $2P$ треугольника ABC, если из $2P$ вычесть сначала $CM+CN=2x$ и к разности прибавить MN. Из подобия треугольников ABC и MNC находим

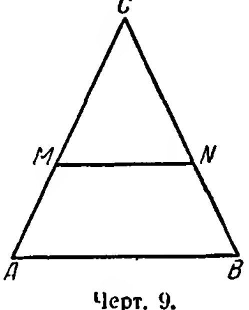
$$MN=\frac{AB\cdot MC}{AC}=\frac{2ax}{P-a}.$$

Следовательно,

$$2P-2x+\frac{2ax}{P-a}=2p,$$

откуда

$$x=\frac{(P-a)(P-p)}{P-2a}.$$

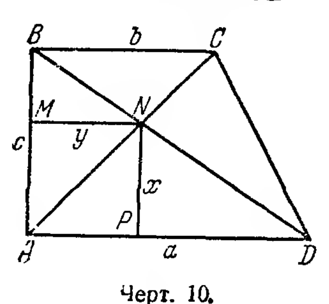


Черт. 9.

Так как по условию $p<P$ и $2a<P$ (а значит, тем более, $a<P$), то величина x положительна, и задача имеет решение.

Отв. На боковых сторонах нужно отложить от вершины отрезки длиной $\frac{(P-a)(P-p)}{P-2a}$.

522. Требуется определить расстояние $NP = x$ точки N (черт. 10) до основания $AD = a$[1]) и расстояние $NM = y$ до боковой стороны $AB = c$. Из подобия треугольников AMN и ABC (где $BC = b$) находим $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$, т. е. $\frac{y}{b} = \frac{x}{c}$, а из

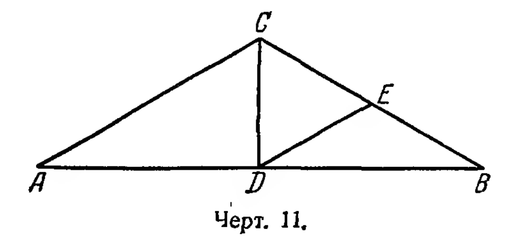


Черт. 10.

подобия треугольников NPD и BAD имеем $\frac{NP}{BA} = \frac{PD}{AD}$, т. е. $\frac{x}{c} = \frac{a-y}{a}$. Решаем эти два уравнения.

Отв. $x = \frac{ac}{a+b}$; $y = \frac{ab}{a+b}$.

523. Пусть ABC (черт. 11)—данный треугольник. Так как DE—средняя линия треугольника и $DE = CD$, то $CD = \frac{1}{2}AC$.



Черт. 11.

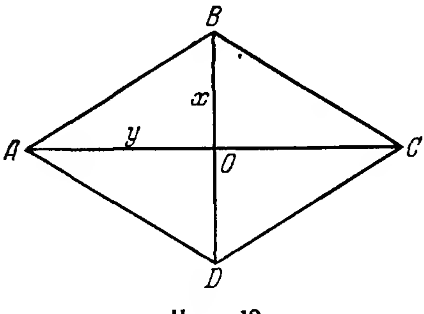
Следовательно, $\angle CAD = 30°$. Поэтому $CD = \frac{AD\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ *см.*

Отв. $S = 12\sqrt{3}$ *см*^{2}.

---

[1]) Решение останется тем же, будет ли a большим или меньшим основанием.

524. Положим $x = BO$, $y = AO$ (черт. 12). Тогда площадь S ромба $ABCD$ равна $2xy$. По условию $x + y = \frac{m}{2}$;

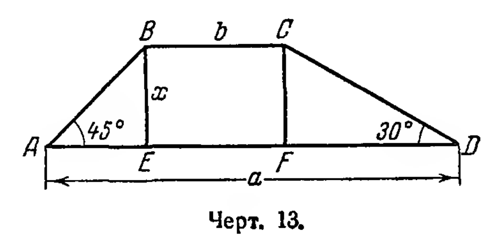


Черт. 12.

кроме того, из прямоугольного треугольника AOB, где $AB = \frac{1}{4} 2p = \frac{p}{2}$, находим $x^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Возводя в квадрат обе части первого уравнения и вычтя второе, найдём $2xy = \frac{m^2 - p^2}{4}$.

Отв. $S = \frac{m^2 - p^2}{4}$ *см*^{2}.

525. Обозначим высоту BE (черт. 13) через x. Тогда



Черт. 13.

$AE = x$ и $FD = x\sqrt{3}$. Так как $AD = AE + EF + FD$, то $a = x + b + x\sqrt{3}$. Отсюда $x = \frac{a - b}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(a - b)(\sqrt{3} - 1)}{2}$.

Отв. $S = \frac{(a^2 - b^2)(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

526. По условию $AD = 44$ *см* и $BC = 16$ *см* (черт. 14). Следовательно, $AE + FD = 28$ *см*. Обозначив длину AE (в сантиметрах) через x, имеем $FD = 28 - x$. По условию $AB = 17$ *см* и $CD = 25$ *см*. Значит, $BE^2 = 17^2 - x^2$ и $CF^2 = 25^2 - (28 - x)^2$. Получаем уравнение

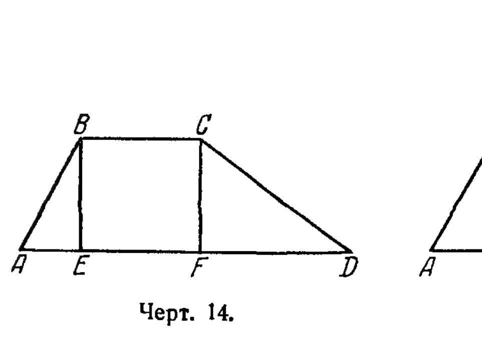
$$17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2,$$

откуда $x = 8$ (*см*). Следовательно,

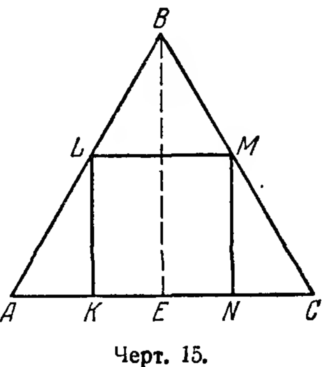
$$h = BE = \sqrt{17^2 - x^2} = 15 \text{ (см)}.$$

Теперь находим $S = \frac{(a+b)h}{2}$.

Отв. $S = 450$ *см*^{2}.



Черт. 14.



Черт. 15.

527. Обозначим сторону вписанного квадрата (черт. 15) через x. Из подобия треугольников AKL (где $AK = \frac{AC - LM}{2} = \frac{a - x}{2}$, а $LK = x$) и AEB $\left(\text{где } AE = \frac{a}{2} \text{ и } BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ получаем уравнение

$$\frac{a - x}{2} : \frac{a}{2} = x : \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

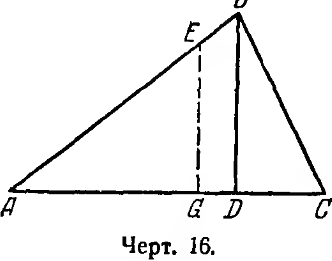
из которого находим

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = a\sqrt{3}\,(2 - \sqrt{3}).$$

Отв. $S = 3a^2(2 - \sqrt{3})^2 = 3(7 - 4\sqrt{3})\,a^2$.

528. По условию $AD = 36$ *см* и $DC = 14$ *см* (черт. 16). Площади S_1 и S_2 треугольников ADB и CBD, имеющих общую высоту, относятся как основания, т. е.

$$S_1 : S_2 = 36 : 14 = \frac{18}{7}.$$



Черт. 16.

Следовательно, $S_1 = \frac{18}{25} S$, где $S = S_1 + S_2$ есть площадь треугольника ABC. По условию прямая EG делит пополам площадь S; значит, эта прямая пересечёт основание AC между точками A и D (а не между D и C). Получим треугольник AGE; его площадь S_3 равна $\frac{1}{2} S$. Так как площади подобных треугольников AGE и ADB относятся как квадраты сторон AG и AD, то

$$\frac{18}{25} S : \frac{1}{2} S = 36^2 : AG^2.$$

Отсюда найдём

$$AG = 30 \text{ (см)}.$$

Значит,

$$GC = AC - AG = (36 + 14) - 30 = 20 \text{ см}.$$

Черт. 17.

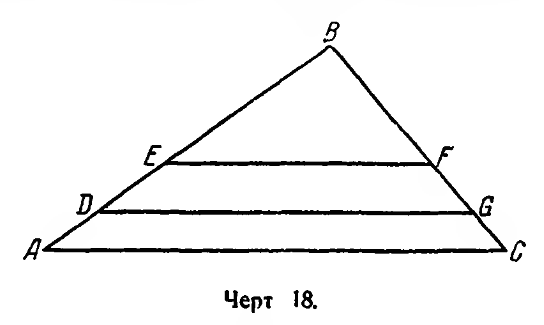
Отв. 30 *см* и 20 *см*.

529. См. решение предыдущей задачи. Из условия $AD : DC = 1 : 8$ находим, что площадь треугольника BDC (черт. 17) составляет $\frac{8}{9}$ площади S треугольника ABC. Так как по условию $BD = 4$, то имеем

$$EF^2 : 16 = \frac{1}{2} S : \frac{8}{9} S.$$

Отв. $EF = 3$.

530. Так как $S_{EBF} = S_{DEFG} = S_{ADGC}$ (черт. 18), то площадь треугольника EBF вдвое меньше площади треугольника DBG и втрое меньше площади треугольника ABC.

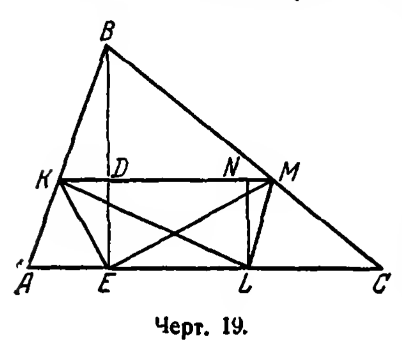


Черт 18.

Так как эти треугольники подобны, то $EB^2 : DB^2 : AB^2 = 1:2:3$. По условию $AB = a$; следовательно, $EB = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $DB = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Отв. Сторона AB разбита на части $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)$ и $\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

531. По условию площадь треугольника ABC (черт. 19) равна S, а площадь треугольника KBM равна q. Три вершины четырёхугольника совпадают с точками K, B и M; четвёртую же вершину L можно взять на стороне AC произвольно. Действительно, площадь S_1 четырёхугольника $LKBM$ есть сумма площади q треугольника KBM и площади треугольника KLM, а последняя не меняется при движении вершины L по прямой AC, параллельной основанию KM. Пусть высота BE треугольника ABC проходит через точку E основания AC. Поместив точку L в точку E, получим четырёхугольник $KBME$, диагонали которого взаимно



Черт. 19.

перпендикулярны; следовательно, $S_1 = \frac{1}{2} KM \cdot BE$. А так как $q = \frac{1}{2} KM \cdot BD$, то $S_1 : q = BE : BD$. Но из подобия треугольников ABC и KBM имеем $S : q = BE^2 : BD^2$. Следовательно,

$$S_1 = q \cdot \frac{BE}{BD} = q \sqrt{\frac{S}{q}} = \sqrt{Sq}.$$

Замечание. Если точка L не совпадает с точкой E, то решение видоизменяется так: находим

$$S_1 = \frac{1}{2} KM \cdot BD + \frac{1}{2} KM \cdot NL = \frac{1}{2} KM (BD + NL) = \frac{1}{2} KM \cdot BE,$$

и дальше попрежнему.

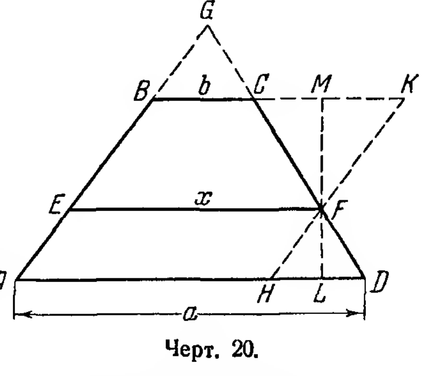
Отв. $\sqrt{Sq}$.

532. Пусть отрезок $EF = x$ (черт. 20) делит площадь трапеции $ABCD$ ($AD = a$, $BC = b$) пополам. Тогда

$$\frac{(a+x) FL}{2} = \frac{(x+b) FM}{2},$$

т. е.

$$(a+x) FL = (x+b) FM.$$



Черт. 20.

Высоты FL и FM по отдельности найти нельзя (длина одной из них может быть взята произвольно), но отношение $FL : FM$ имеет определённую величину. Именно, из подобия треугольников HFD и CFK (где $HD = a - x$ и $CK = x - b$) находим

$$\frac{a-x}{FL} = \frac{x-b}{FM}.$$

Помножив почленно это равенство на предыдущее, получим

$$a^2 - x^2 = x^2 - b^2,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Другой способ. Продолжив боковые стороны, получим подобные друг другу треугольники BGC, EGF и AGD. Их площади S_1, S_2, S_3 пропорциональны квадратам сходственных сторон b, x, a, так что $S_1 = qb^2$, $S_2 = qx^2$, $S_3 = qa^2$, где q — некоторый коэффициент пропорциональности (величина его зависит от высоты трапеции). По условию $S_2 - S_1 = S_3 - S_2$, т. е.

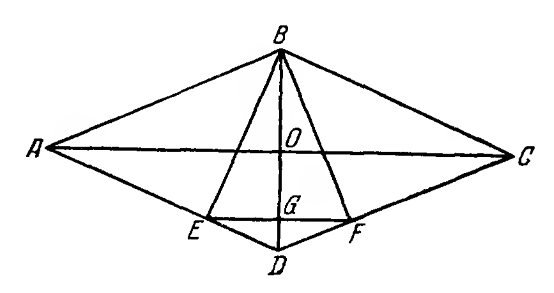
$$q(x^2 - b^2) = q(a^2 - x^2),$$

а так как $q \neq 0$, то

$$x^2 - b^2 = a^2 - x^2.$$

Отв. $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

533. По условию $BE = BF = a$ (черт. 21) и $EF = b$. Значит, $EG = \frac{b}{2}$ и $BG = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$. По теореме о пропорциональных линиях в прямоугольном треугольнике (BDE)



Черт. 21.

находим $BD = \dfrac{BE^2}{BG} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$. Теперь найдём сторону ромба (AD). Равнобедренные треугольники ABD и BEF подобны, так как их углы (все они острые) соответственно равны (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Следовательно,

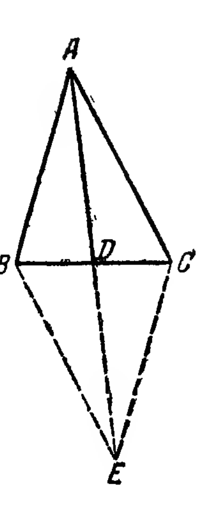
$$AD : BD = BE : EF,$$

т. е.

$$AD : \frac{a^2}{\sqrt{a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}} = a : b.$$

Отсюда находим AD, а затем площадь ромба $S = AD \cdot a$.

Отв. $\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2-b^2}}$.



Черт. 22.

534. Пусть $AB = 27$ *см* и $AC = 29$ *см* (черт. 22); тогда медиана $AD = 26$ *см*. Требуется найти BC. Продолжим AD на расстояние $DE = AD$. Четырёхугольник $ABEC$ будет параллелограммом (доказать!) со сторонами 27 *см* и 29 *см*; а диагонали его $AE = 2AD = 52$ *см* и $BC = x$ *см*. Имеем

$$x^2 + 52^2 = 2(27^2 + 29^2),$$

откуда

$$x = \sqrt{436}\ (см).$$

Теперь площадь треугольника можно вычислить по формуле Герона. Имеем

$$p = \frac{1}{2}(27 + 29 + \sqrt{436}) = 28 + \sqrt{109}$$

и

$$S = \sqrt{(28+\sqrt{109})(28-\sqrt{109})(\sqrt{109}+1)(\sqrt{109}-1)} = \sqrt{(28^2-109)(109-1)} = 270.$$

Отв. 270 *см*^{2}.

535. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, а так как $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, т. е. $\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{4}{5}$, то

$$\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\frac{3}{5}.$$

Получаем два решения; оба они годятся (в одном случае угол A острый, в другом — тупой).

Отв. $a = \sqrt{b^2+c^2-\frac{6}{5}bc}$ или $a = \sqrt{b^2+c^2+\frac{6}{5}bc}$.

536. При обозначениях черт. 23 имеем из треугольника ABC:

$$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B,$$

а так как $\cos B = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$, то

$$m^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A.$$

Из треугольника ADC находим

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos D.$$

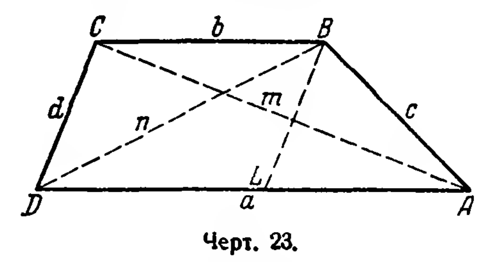
Приравнивая это выражение предыдущему, получаем

$$2bc\cos A + 2ad\cos D = a^2 - b^2 + d^2 - c^2. \qquad (1)$$

Таким же образом, рассматривая треугольники ABD и CBD, получим

$$2ac\cos A + 2bd\cos D = a^2 - b^2 - (d^2 - c^2). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) можно найти $\cos A$ и $\cos D$, а после этого найдём m^2 и n^2. Вычисление удобно вести так:



Черт. 23.

помножим (1) на b, а (2) на a, после чего вычтем первое уравнение из второго. Получим

$$2(a^2 - b^2)c\cos A = (a^2 - b^2)(a - b) - (d^2 - c^2)(a + b).$$

Разделив обе части равенства на $(a^2 - b^2)\,[\neq 0]$, получим

$$2c\cos A = a - b - \frac{d^2 - c^2}{a - b}.$$

Теперь находим

$$m^2 = b^2 + c^2 + (2c\cos A)\,b =$$

$$= c^2 + ab - \frac{(d^2 - c^2)\,b}{a - b} = \frac{a(c^2 - b^2) + b(a^2 - d^2)}{a - b}.$$

Аналогично найдём

$$2d\cos D = a - b + \frac{d^2 - c^2}{a - b}$$

и затем

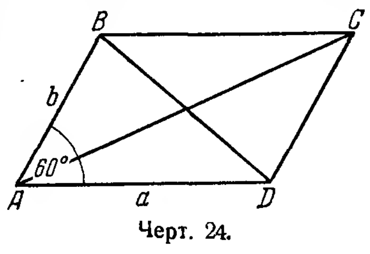
$$n^2 = b^2 + d^2 + (2d\cos D)\,b = \frac{a(d^2 - b^2) + b(a^2 - c^2)}{a - b}.$$

Замечание. Отрезок $AD = a$ меньше ломаной $ABCD$. Поэтому задача может иметь решение лишь при условии $a < b + c + d$. Однако одного этого условия мало, что видно из следующего. Пусть $a > b$ и $c \geqslant d$ (если эти неравенства не выполняются, то всегда можно изменить обозначения и после этого неравенства будут иметь место). Проведём прямую BL параллельно стороне CD. Получим параллелограмм $DCBL$, так что $BL = CD = d$ и $DL = CB = b$. В треугольнике ALB сторона $LA = DA - DL = a - b$ больше, чем разность сторон $AB = c$ и $BL = d$. Поэтому должно соблюдаться ещё второе условие $a - b > c - d$. Если хотя бы одно из двух условий не выполнено, то по крайней мере одно из выражений, полученных для m^2 и n^2, окажется отрицательным.

Двух условий $a < b + c + d$ и $a - b > c - d$ *уже достаточно,* чтобы задача имела решение. Действительно, первое условие можно записать в виде $a - b < c + d$. Следовательно, можно построить треугольник ABL со сторонами $AL = a - b$, $AB = c$ и $BL = d$. Продолжив сторону AL на расстояние $LD = b$ и построив параллелограмм $DLBC$, получим четырёхугольник $ABCD$; он будет трапецией с основаниями $AD = a$, $BC = b$ и боковыми сторонами $AB = c$ и $DC = d$.

Отв. $m^2 = \dfrac{a(c^2 - b^2) + b(a^2 - d^2)}{a - b}$,

$n^2 = \dfrac{a(d^2 - b^2) + b(a^2 - c^2)}{a - b}$.



Черт. 24.

537. При обозначениях черт. 24, где $\angle A = 60°$, имеем

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot BA \cdot AD \cdot \cos 60° = a^2 + b^2 - ab$$

и

$$AC^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

Так как AC больше BD, то данное отношение $\frac{19}{7}$ равно $\frac{AC^2}{BD^2}$

$\left(\text{а не } \frac{BD^2}{AC^2}\right)$. Из уравнения

$$\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}=\frac{19}{7} \quad \text{или} \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1+\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1-\frac{a}{b}}=\frac{19}{7}$$

находим $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ и $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. Оба эти значения дают один и тот же параллелограмм (на черт. 24 можно изменить обозначения — обозначить AB через a и AD через b).

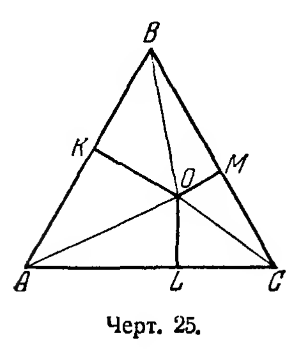
Отв. Стороны относятся, как 3 : 2.

538. Пусть O — произвольная точка внутри равностороннего треугольника ABC (черт. 25). Соединим точку O с вершинами. Площади треугольников AOB, BOC и COA в сумме дадут площадь треугольника ABC. Обозначая сторону этого треугольника через a, а высоту через h, получим

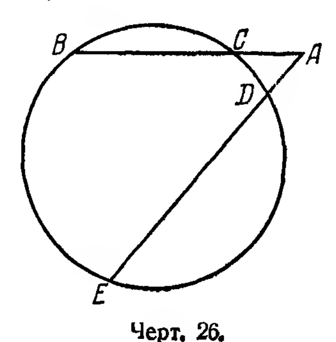
$$(OK+OL+OM)\frac{a}{2}=\frac{ah}{2}.$$

Отсюда находим

$$h=OK+OL+OM.$$



Черт. 25.



Черт. 26.

539. По условию $BC=47$ *м* и $CA=9$ *м* (черт. 26; на этом чертеже истинные размеры не соблюдены); значит, $BA=56$ *м*. Следовательно, $AD \cdot AE=9 \cdot 56=504$. Пусть $AD=x$; тогда $DE=x+72$ и, значит, $AE=2x+72$. Из уравнения $x(2x+72)=504$ находим $x=6$.

Отв. $AE=84$ *м*.

540. Задача сводится к разысканию одного из катетов треугольника OAB (черт. 27) по данной гипотенузе $OA = m$ и высоте $BD = \frac{a}{2}$. Обозначим больший катет через x, меньший — через y. Двоякое выражение площади треугольника OAB (см. решение задачи 512) даёт уравнение $xy = a\frac{m}{2}$, т. е. $2xy = am$; кроме того, $x^2 + y^2 = m^2$. Складывая и вычитая эти уравнения почленно, получим

$$x + y = \sqrt{m^2 + am}$$

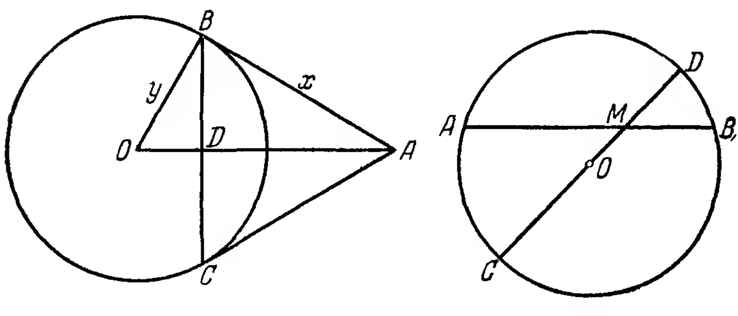
и

$$x - y = \sqrt{m^2 - am}.$$

Как x, так и y может служить искомым радиусом.

Отв. $\frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + am} + \sqrt{m^2 - am})$

или $\frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + am} - \sqrt{m^2 - am})$.



Черт. 27. Черт. 28.

541. Так как радиус круга равен 13 *см* и $MO = 5$ *см*, то $MD = 8$ *см*, $MC = 18$ *см* (черт. 28). Обозначим MB через x. Тогда $AM = 25 - x$. Так как $AM \cdot MB = MD \cdot MC$, то

$$(25 - x)x = 18 \cdot 8.$$

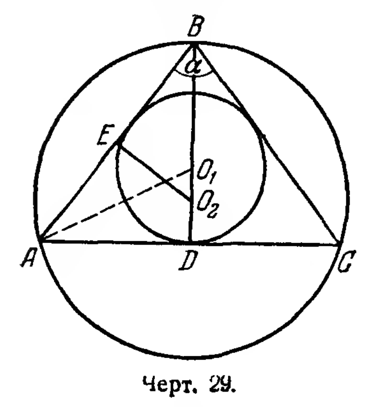
Отсюда $x_1 = 16$, $x_2 = 9$.

Отв. Отрезки равны 16 *см* и 9 *см*.

542. Из треугольника EBO_2 (черт. 29), где $BE=\frac{1}{2}AB$, находим

$$R=O_2B=\frac{AB}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника ADO_1, где $\angle DAO_1=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$,



Черт. 29.

находим

$$r=O_1D=AD\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right).$$

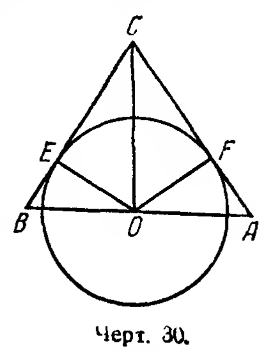
Так как $AD=AB\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ (из треугольника ABD), то

$$R:r=\frac{\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}.$$

Отв. $\frac{R}{r}=\frac{\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$.

543. По условию $a=BC=13$ *см*, $b=CA=14$ *см*, $c=AB=15$ *см* (черт. 30). Обозначим $OE=OF$ через R. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников BOC и AOC. Так как площади этих треугольников равны соответственно $\frac{13R}{2}$ и $\frac{14R}{2}$, то

$$S_{ABC}=\frac{27R}{2}.$$



Черт. 30.

С другой стороны, по формуле Герона

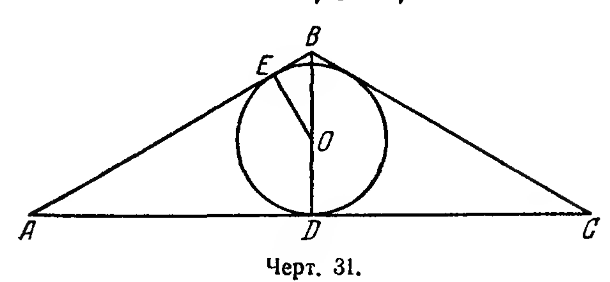
$$S_{ABC}=\sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}=84\ см^2.$$

Приравниваем друг другу эти выражения площади.

Отв. $R=6\frac{2}{9}$ *см*.

544. В прямоугольном треугольнике OEB (черт. 31) угол EBO равен 60°. Поэтому

$$BO = EO \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$



Черт. 31.

Следовательно,

$$BD = R\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{R(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}.$$

Из треугольника ABD находим

$$AB = \frac{2R(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad AD = R(\sqrt{3}+2);$$

следовательно,

$$AC = 2R(\sqrt{3}+2).$$

Отв. $AB = BC = \frac{2R(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}, \quad AC = 2R(\sqrt{3}+2).$

545. Из треугольника ABD (черт. 32) имеем

$$BD = \sqrt{BA^2 - AD^2} = 18 \text{ } см.$$

Так как

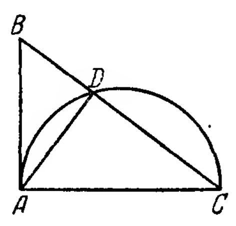
$$BC \cdot BD = BA^2,$$

то

$$BC = \frac{BA^2}{BD} = 50 \text{ } см.$$

Следовательно,

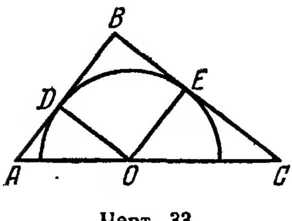
$$AC = \sqrt{BC^2 - BA^2} = 40 \text{ } см.$$



Черт. 32.

Отв. Длина полуокружности равна 20π.

546. Так как углы B, D и E четырёхугольника $ODBE$ прямые и $DO = OE$ (черт. 33), то этот четырёхугольник есть квадрат. Искомая дуга DE равна четверти длины всей окружности. Обозначим её радиус через R. Из подобия треугольников ADO и OEC имеем



Черт. 33.

$$\frac{AD}{AO} = \frac{OE}{OC}.$$

Так как

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{15^2 - R^2},$$

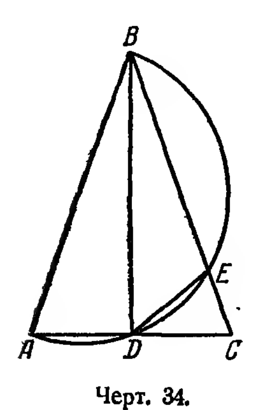
то

$$\frac{\sqrt{15^2 - R^2}}{15} = \frac{R}{20}.$$

Отсюда $R = 12$.

Отв. 6π.

547. Площадь S четырёхугольника $ADEB$ (черт. 34) равна



Черт. 34.

$$S = S_{ABC} - S_{DEC}.$$

Имеем

$$S_{ABC} = \frac{AC}{2} BD = 12 \ (см^2).$$

Для разыскания S_{DEC} заметим, что треугольники DEC и DBC имеют общую вершину D и одну и ту же высоту (на чертеже не обозначенную), причём $S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 6 \ (см^2)$. Следовательно, $S_{DEC} : 6 = CE : CB$. Неизвестный отрезок CE найдём из свойства секущих, проведённых из одной точки (C). Имеем $CE \cdot CB = CD \cdot CA$, откуда $CE = \frac{CD \cdot CA}{CB}$. Следовательно,

$$S_{DEC} = 6 \frac{CE}{CB} = 6 \frac{CD \cdot CA}{CB^2} = 6 \frac{2 \cdot 4}{2^2 + 6^2} = 1{,}2 \ (см^2).$$

Отв. $S = 10{,}8$ *см*^{2}.

548. Площадь S треугольника ABC (черт. 35) равна произведению его периметра $2a+2\sqrt{a^2+h^2}$ на $\frac{r}{2}$ (r — радиус вписанной окружности):

$$S=(a+\sqrt{a^2+h^2})\,r.$$

С другой стороны,

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BG=ah.$$

Приравнивая эти два выражения, находим

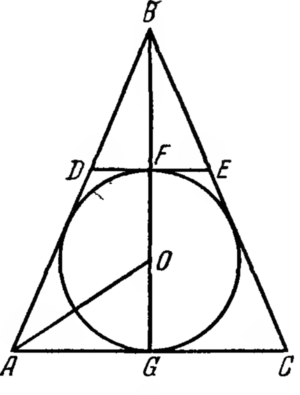
$$r=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Отрезок DE находим из пропорции

$$DE:AC=BF:BG,$$

где

$$AC=2a,\quad BF=h-2r \quad \text{и} \quad BG=h.$$



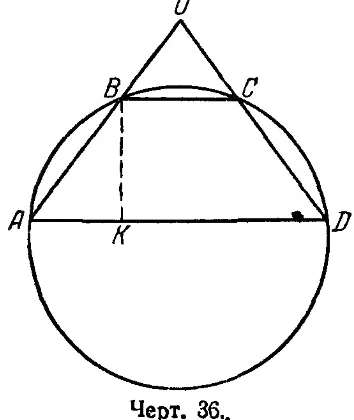
Черт. 35.

Замечание. Величину r можно найти ещё так: прямая AO есть биссектриса угла A. Значит, отрезки $GO=r$ и $OB=h-r$ пропорциональны сторонам AG и AB, т. е.

$$\frac{r}{h-r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Отв. $r=\frac{ha}{\sqrt{a^2+h^2}+a}$;

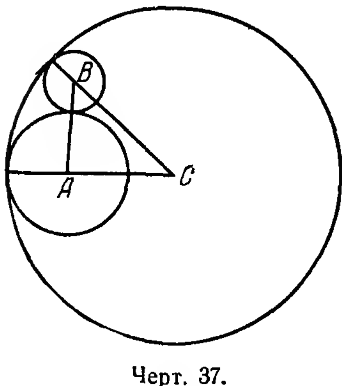
$$DE=2a\,\frac{\sqrt{a^2+h^2}-a}{\sqrt{a^2+h^2}+a}=\frac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}.$$



Черт. 36.

549. Так как $OB\cdot OA=OC\cdot OD$ (черт. 36) и $OB=OC$, то $OA=OD$. Противоположные стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ равны; значит, данные длины 6 *м* и 2,4 *м* относятся к сторонам AD и BC ($AD=6$ *м*, $BC=2{,}4$ *м*). Прямые BC и AD, отсекающие на сторонах угла AOD равные

отрезки, параллельны, так что четырёхугольник $ABCD$ — трапеция (равнобочная). Из подобия треугольников BOC и AOD находим



Черт. 37.

$$BO : AO = BC : AD,$$

откуда

$$AO = \frac{BO \cdot AD}{BC} = \frac{2 \cdot 6}{2,4} = 5\ (м);$$

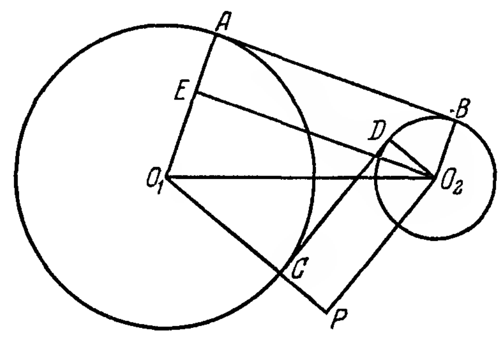
значит, $AB = 3$ м. Теперь находим высоту трапеции

$$h = BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{6-2,4}{2}\right)^2} = 2,4\ м.$$

Отв. $S = 10,08$ м².

550. По условию $AB = 6$ м, $AC = 7$ м, $BC = 9$ м (черт. 37). Пусть R_A, R_B и R_C — искомые радиусы окружностей с центрами в A, B и C. Тогда $R_A + R_B = 6$, $R_C - R_A = 7$, $R_C - R_B = 9$. Отсюда находим радиусы R_A, R_B и R_C.

Отв. $R_A = 4$ м, $R_B = 2$ м, $R_C = 11$ м.



Черт. 38.

551. Проведём O_2E параллельно AB и O_2P параллельно DC (черт. 38). По условию $AB = \frac{3}{2} CD$. Обозначим CD

через x. Тогда $O_2P = x$, $O_2E = \frac{3}{2}x$. Из треугольников O_1EO_2 и O_1PO_2 имеем

$$O_1O_2^2 = O_1E^2 + \frac{9}{4}x^2 \quad \text{и} \quad O_1O_2^2 = O_1P^2 + x^2.$$

Приравниваем эти два выражения и учитываем, что

$$O_1E = O_1A - EA = O_1A - O_2B = 5 - 2 = 3 \ (\textit{см})$$

и аналогично

$$O_1P = O_1C + O_2D = 7 \ (\textit{см}).$$

Тогда получаем

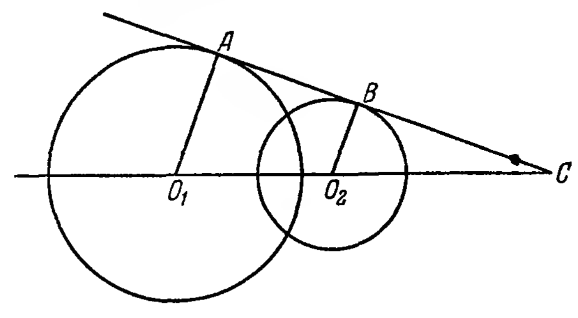
$$9 + \frac{9}{4}x^2 = 49 + x^2,$$

откуда $x^2 = 32$. Поэтому

$$O_1O_2^2 = 49 + 32 = 81.$$

Отв. $O_1O_2 = 9$ *см*.

552. Так как расстояние между центрами окружностей меньше суммы, но больше разности их радиусов, то окруж-



Черт. 39.

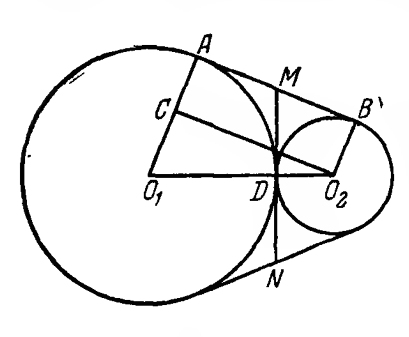
ности пересекаются; значит, они имеют общую внешнюю касательную и не имеют общей внутренней касательной. Положим $O_1C = x$ и $O_2C = y$ (черт. 39). Имеем

$$x - y = O_1O_2 = 21 \ (\textit{см}) \quad \text{и} \quad x : y = O_1A : O_2B = 17 : 10.$$

Отв. $O_1C = 51$ *см*, $O_2C = 30$ *см*.

553. Через точку M (черт. 40) проходят две касательные (MD и MA) к окружности O_1. Значит, $MD = MA$. Так же докажем, что $MD = MB$. Следовательно,

$$MN = 2MD = AM + MB = AB.$$



Черт. 40.

Чтобы найти AB, проведём прямую O_2C, параллельную AB. Из треугольника O_1O_2C, где $O_2C = AB$, $O_1O_2 = R + r$ и $O_1C = R - r$, получаем

$$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$$

или

$$AB = 2\sqrt{Rr}.$$

Отв. $MN = 2\sqrt{Rr}$.

554. Пусть MN — общая касательная к двум окружностям (черт. 41). Так как $AM = MP = MB$, то MN — средняя линия трапеции $ABCD$. Имеем $MN = AB = 2\sqrt{Rr}$ (см. решение предыдущей задачи). Найдём теперь высоту BG трапеции. По теореме о пропорциональных линиях в прямоугольном треугольнике (EAB) имеем

$$BG = \frac{AB^2}{BE}.$$

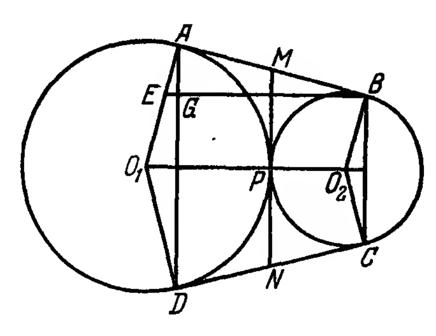
Но

$$BE = O_1O_2 = R + r.$$

Следовательно,

$$BG = \frac{4Rr}{R+r}.$$

Отв. $S = \dfrac{8(Rr)^{3/2}}{R+r}$.



Черт. 41.

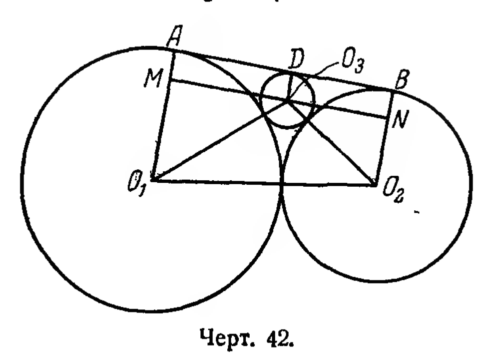
555. Обозначим радиус искомой окружности через x. Проведём через её центр O_3 (черт. 42) прямую $MN \parallel AB$. Так как прямая AB перпендикулярна к радиусам O_1A, O_2B и O_3D, то $AM = BN = x$ и, значит, $O_1M = R - x$ и $O_2N = r - x$. Кроме того, имеем $O_1O_3 = R + x$ и $O_2O_3 = r + x$.

Следовательно,

$$MO_3 = \sqrt{(R+x)^2-(R-x)^2} = 2\sqrt{Rx};$$

точно так же

$$NO_3 = 2\sqrt{rx}.$$



Черт. 42.

А так как $MN = 2\sqrt{Rr}$ (см. задачу 553), то

$$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr},$$

откуда

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}.$$

Отв. Радиус окружности равен $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

556. Так как $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, где C — угол между хордами, то задача не имеет решения при $S > \frac{1}{2}ab$. Если $S < \frac{1}{2}ab$, то находим $\sin C = \frac{2S}{ab}$ и существует два треугольника, имеющих стороны a и b и площадь S; у одного угол C — острый, у другого — тупой. В первом случае $\cos C = \sqrt{1-\frac{4s^2}{a^2b^2}}$, во втором $\cos C = -\sqrt{1-\frac{4s^2}{a^2b^2}}$. Следовательно,

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C = a^2+b^2 \mp 2\sqrt{a^2b^2-4S^2}$$

(верхний знак, если угол C острый, нижний — если тупой).

При $S=\frac{1}{2}ab$ получаем прямоугольный треугольник, так что $c^2=a^2+b^2$.

Радиус окружности, в которую вписан треугольник, находится по формуле $R=\frac{c}{2\sin C}$.

Отв. $R=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2\mp 2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}}{4S}$. При $S>\frac{1}{2}ab$ решений нет, при $S<\frac{1}{2}ab$ — два решения (верхний знак, если угол между хордами острый, нижний — если тупой). При $S=\frac{1}{2}ab$ — одно решение (хорды взаимно перпендикулярны).

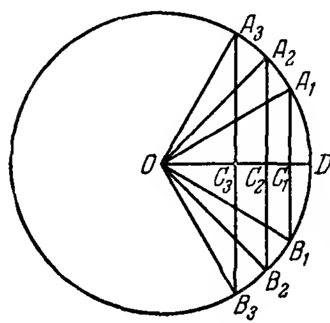
557. По условию (черт. 43) $A_1B_1=a_6=R$, $A_2B_2=a_4=R\sqrt{2}$ и $A_3B_3=a_3=R\sqrt{3}$. Высоты треугольников OA_1B_1, OA_2B_2 и OA_3B_3 соответственно равны

$$OC_1=\frac{R\sqrt{3}}{2};$$

$$OC_2=\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

и

$$OC_3=\frac{R}{2}.$$



Черт. 43.

Отсюда определим площади этих треугольников. Затем найдём площадь сектора OA_1DB_1; он составляет $\frac{1}{6}$ площади круга; поэтому

$$S_{OA_1DB_1}=\frac{1}{6}\pi R^2.$$

Аналогично $S_{OA_2DB_2}=\frac{1}{4}\pi R^2$ и $S_{OA_3DB_3}=\frac{1}{3}\pi R^2$. Вычитая из площади каждого сектора площадь соответствующего треугольника, находим площади сегментов:

$$S_1=R^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad S_2=R^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right),\quad S_3=R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Площадь части круга, заключённой между хордами A_1B_1 и A_2B_2, равна

$$S_2-S_1=\frac{R^2}{12}(\pi+3\sqrt{3}-6);$$

площадь круга, заключённая между A_2B_2 и A_3B_3 равна

$$S_3 - S_2 = \frac{R^2}{12}(\pi - 3\sqrt{3} + 6).$$

Отв. Отношение площадей равно $\frac{\pi + 3(2-\sqrt{3})}{\pi - 3(2-\sqrt{3})}$.

558. Для определения радиуса $OK = r$ (черт. 44) вписанного круга воспользуемся формулой площади треугольника $S = pr$ (p — полупериметр треугольника). По условию $AD = 14,4$ *см*, $DC = 25,6$ *см*, поэтому $AC = 40$ *см*. Значит,

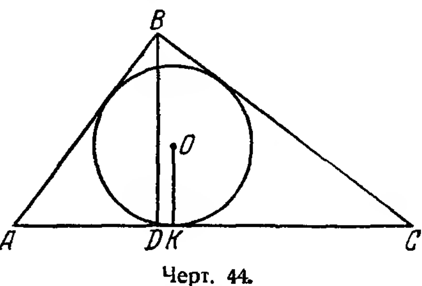
$$AB = \sqrt{AD \cdot AC} = 24 \text{ (см)},$$

$$BC = \sqrt{DC \cdot AC} = 32 \text{ (см)}.$$

Следовательно,

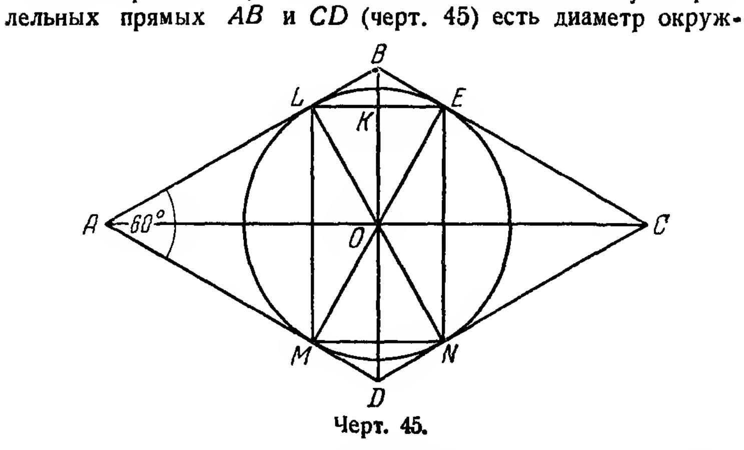
$p = 48$ *см* и $S = 384$ *см*^{2}.

Отв. Площадь круга равна 64π *см*^{2}.



Черт. 44.

559. Прямая LN, соединяющая точки касания двух параллельных прямых AB и CD (черт. 45) есть диаметр окруж-



Черт. 45.

ности. Поэтому вписанные углы LEN и LMN (и аналогично углы MLE и MNE) — прямые. Следовательно, четырёхугольник

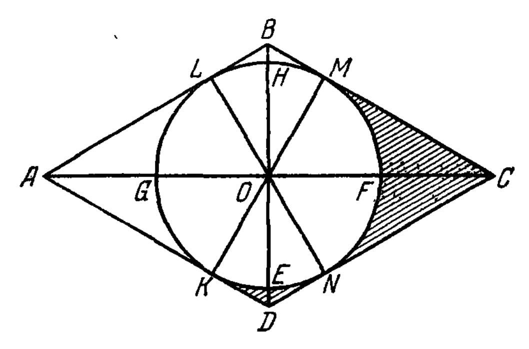
$LENM$ действительно явится прямоугольником. Треугольник ABD — равносторонний (ибо $AB=AD$ и $\angle A=60°$); отрезок LN (высота ромба) равен высоте треугольника ABD, т. е. $LN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Площадь S прямоугольника равна

$$\frac{1}{2}LN^2\cdot\sin\angle LOE=\frac{1}{2}LN^2\cdot\sin\angle BAD$$

(стороны углов LOE и BAD взаимио перпендикулярны). Следовательно, $S=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin 60°$.

Отв. $S=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

560. Требуется определить площадь S_1 фигуры $MCNF$ (черт. 46) и площадь S_2 фигуры $KDNE$ (площади фигуры

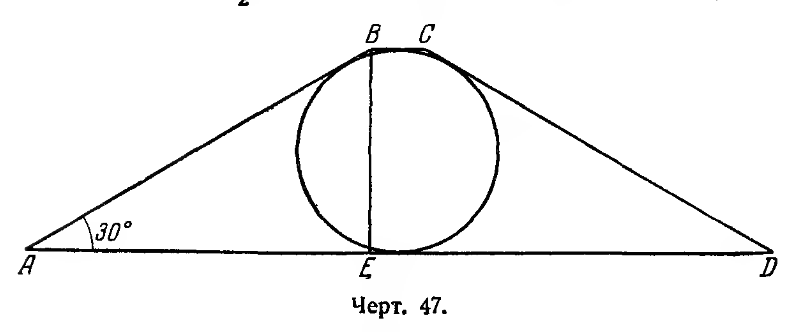


Черт. 46.

$KALG$ и $LBMH$ соответственно равны S_1 и S_2). Так как по условию задачи $AC=4R$, то $OC=2\cdot OM$; следовательно, $\angle OCM=30°$. Значит, $\angle MON=180°-2\cdot 30°=120°$ и $\angle KON=60°$. Площадь четырёхугольника $CMON$ равна $R^2\sqrt{3}$, а площадь сектора $MONF$ равна $\frac{1}{3}\pi R^2$. Следовательно, $S_1=R^2\sqrt{3}-\frac{\pi R^2}{3}$; так же найдём $S_2=\frac{\sqrt{3}}{3}R^2-\frac{\pi R^2}{6}$.

Отв. $S_1=\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$; $S_2=\frac{R^2(2\sqrt{3}-\pi)}{6}$.

561. Так как $\angle A = 30°$ (черт. 47), то высота $BE = h$ трапеции равна $\frac{1}{2}AB$. По свойству описанного четырёх-



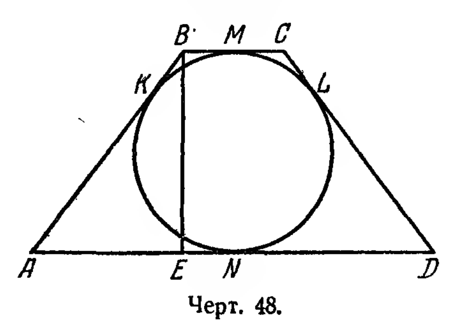
Черт. 47.

угольника $BC + AD = AB + CD = 2AB$. Поэтому

$$S = \frac{AB + CD}{2}h = \frac{1}{2}AB^2.$$

Отв. $AB = \sqrt{2S}$.

562. По площади $S = 20$ *см*² и высоте $BE = 2r = 4$ *см* (черт. 48) найдём полусумму оснований $\frac{AD + BC}{2} = 5$ (*см*).



Черт. 48.

Следовательно, $AB = 5$ *см* (см. предыдущую задачу). Теперь находим $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 3$ (*см*). Но AE есть полуразность оснований трапеции. По полусумме и полуразности находим сами основания.

Отв. $AD = 8$ *см*, $BC = 2$ *см*, $AB = CD = 5$ *см*.

563. Площадь Q трапеции $ABCD$ (черт. 49) равна

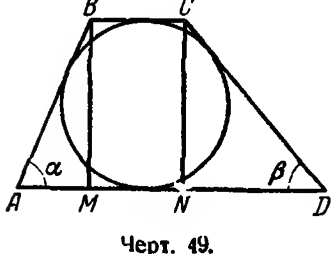
$$\frac{BC+AD}{2}BM=(BC+AD)R$$

(R — радиус вписанного круга). Так как эта трапеция описана около круга, то $BC+AD=AB+CD$. Но $AB=\frac{2R}{\sin\alpha}$, а $CD=\frac{2R}{\sin\beta}$. Поэтому

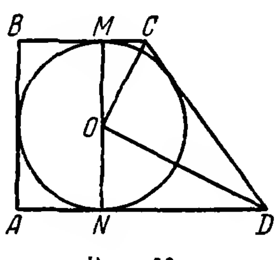
$$Q=2R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)=2R^2\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Отв. $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$.



Черт. 49.



Черт. 50.

564. Так как боковая сторона AB (черт. 50), перпендикулярная к основаниям, равна $2r$, то наклонная боковая сторона CD больше, чем $2r$. Значит, наименьшая сторона трапеции, равная $\frac{3}{2}r$, есть (меньшее) основание BC. Чтобы найти большее основание AD, проведём прямые OC и OD. Они являются биссектрисами углов MCD и NDC, в сумме составляющих 180°. Следовательно, $\angle MCO+\angle ODN=90°$. Из прямоугольного треугольника ODN находим $\angle NOD+\angle ODN=90°$. Следовательно, $\angle NOD=\angle MCO$, так что треугольники ODN и OCM подобны. Получаем пропорцию

$ND : ON = OM : MC$, где $ON = OM = r$ и $MC = \frac{r}{2}$ (по условию задачи). Отсюда $ND = 2r$, так что $AD = AN + ND = r + 2r = 3r$.

Отв. $S = \frac{9r^2}{2}$.

565. Треугольники OMC и OND (черт. 50) подобны (см. предыдущую задачу). Так как $\frac{OD}{OC} = \frac{4}{2} = 2$, то $\frac{ND}{OM} = 2$ и $\frac{ON}{MC} = 2$, т. е. $ND = 2OM = 2r$ и $MC = \frac{ON}{2} = \frac{1}{2}r$. Из прямоугольного треугольника OND находим $r^2 + (2r)^2 = 4^2$, откуда

$$r = \frac{4}{\sqrt{5}} \ (см).$$

Теперь находим $AD = AN + ND = r + 2r = 3r = \frac{12}{\sqrt{5}}$ (*см*) и $BC = \frac{6}{\sqrt{5}}$ (*см*). Высота MN трапеции равна

$$2r = \frac{8}{\sqrt{5}} \ (см).$$

Отв. $S = 14{,}4$ *см*^{2}.

566. Центр O первого круга (черт. 51) делит высоту $BN = h$ в отношении $BO : ON = 2 : 1$. Следовательно, диаметр MN составляет $\frac{2}{3}h$ и, значит, $BM = \frac{1}{3}h$. Второй круг вписан в треугольник DBE, высота которого втрое меньше высоты h треугольника ABC. Значит, радиус $r_1 = O_1M$ втрое меньше радиуса $r = ON$. Поэтому, если S есть площадь круга O $\left[S = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}\right]$, то площадь круга O_1 будет $S_1 = \frac{1}{3^2}S$. А так как таких кругов три, то общая их площадь Q_1 будет

$$Q_1 = \frac{1}{3}S.$$

Рассуждая так же, найдём, что общая площадь трёх сле-

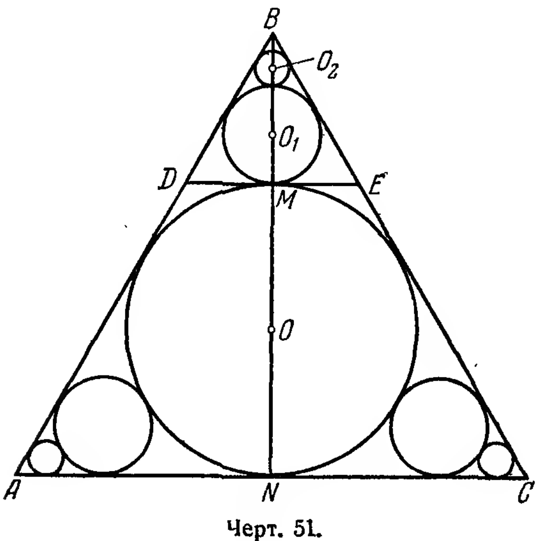
дующих кругов будет

$$Q_2 = \frac{1}{3^2} Q_1 = \frac{1}{3^3} S \text{ и т. д.}$$

Получим бесконечный ряд слагаемых

$$S + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots = S + \frac{1}{3} S + \frac{1}{3^3} S + \frac{1}{3^5} S + \ldots$$

Члены этого ряда, начиная с члена $\frac{1}{3} S$ (слагаемое S выде-



Черт. 51.

ляется особо), образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию $\left(a_1 = \frac{1}{3} S;\ q = \frac{1}{3^2}\right)$. Сумма этой прогрессии равна

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3} S}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8} S.$$

Сюда нужно ещё прибавить слагаемое S.

Отв. Искомая площадь равна $\frac{11}{8} S = \frac{11}{96} \pi a^2$.

567. Чтобы найти площадь трапеции $BMNC$ (черт. 52), нужно найти основание BM и высоту MN, так как CN известно. Определим сначала

$$CD = x.$$

Имеем

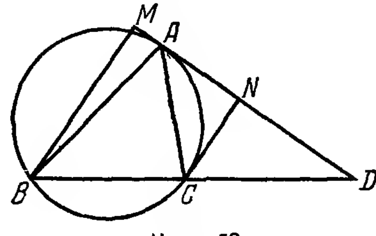
$$x(BC + x) = AD^2$$

или

$$x(5 + x) = 150.$$

Отсюда

$$CD = x = 10 \text{ (см)}.$$



Черт. 52.

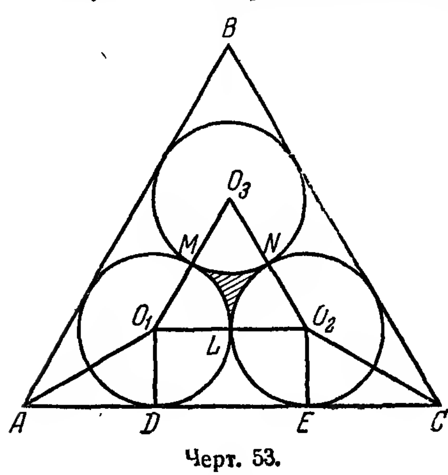
Из подобия треугольников BMD и CND следует $\frac{BM}{BD} = \frac{CN}{CD}$ или $\frac{BM}{15} = \frac{6}{10}$, откуда $BM = 9$ (*см*). Высоту MN трапеции найдём из пропорции $\frac{MN}{BC} = \frac{ND}{CD}$, где $ND = \sqrt{CD^2 - CN^2}$. Получим $MN = 4$ *см*.

Отв. $S = 30$ *см*^{2}.

568. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры равных вписанных кругов и пусть r — их радиус (черт. 53). Так как AO_1 и CO_2 — биссектрисы углов A и C, равных 60°, то $\angle O_1AD = 30°$; следовательно, $AD = EC = r\sqrt{3}$. Далее $DE = O_1O_2 = 2r$. Поэтому $2r(1 + \sqrt{3}) = a$.

Отв.

$$r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}.$$



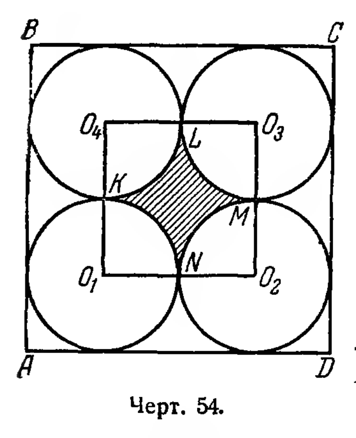
Черт. 53.

569. Искомая площадь LMN (заштрихована на черт. 53) получается, если из площади треугольника $O_1O_2O_3$ вычесть общую площадь трёх секторов O_1ML, O_2LN и O_3NM (их общая площадь равна площади полукруга радиуса r). Сторона

треугольника $O_1O_2O_3$ равна $2r = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$ (см. предыдущую задачу); поэтому

$$S_{O_1O_2O_3} = r^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{16}.$$

Общая площадь трёх секторов равна



Черт. 54.

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)^2}{32} = \frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{16}.$$

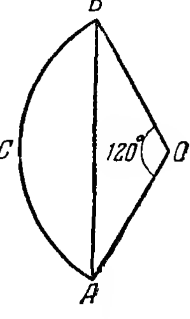
Отв. $S = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a^2(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{16}.$

570. Решается подобно предыдущей (черт. 54).

Отв. $S = \frac{a^2(4-\pi)}{16}.$

571. Определим радиус R дуги окружности сегмента. Периметр его равен сумме длин дуги $\overset{\frown}{ACB}$ и хорды AB (черт. 55). Получаем $\frac{2}{3}\pi R + R\sqrt{3} = p$, откуда

$$R = \frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}.$$



Черт. 55.

Площадь S сегмента равна площади сектора без площади треугольника OAB, так что

$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Отв. $S = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}.$

572. Для того чтобы найти стороны AB и BC треугольника ABC (черт. 56), достаточно определить $EB = BG = x$,

так как $AE = AD = 6$ *см* и $CG = CD = 8$ *см*. Для этого сравним два выражения для площади треугольника:

$$S = rp \text{ и } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p есть полупериметр треугольника, т. е.

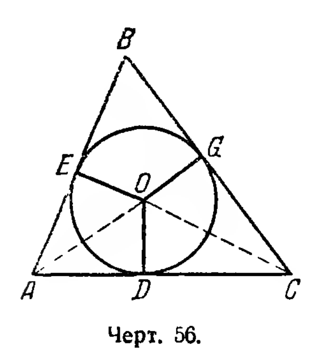
$$\frac{1}{2}(EA + AD + DC + CG + GB + BE) = \frac{1}{2}(28 + 2x) = 14 + x.$$

Получим уравнение

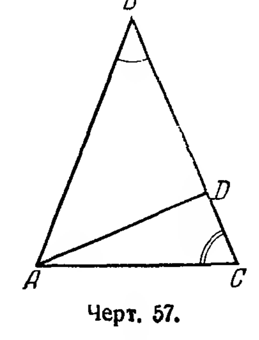
$$4(14 + x) = \sqrt{(14 + x)x \cdot 6 \cdot 8}.$$

Отсюда $x = 7$ (*см*).

Отв. $AB = 13$ *см*; $BC = 15$ *см*.



Черт. 56.



Черт. 57.

573. Пусть $CD : DB = m : n$ (черт. 57). Тогда $BD : BC = n : (m + n)$. Следовательно, $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{n}{m+n}$. Так как $B = 180° - 2C$, то $\cos 2C = \cos(180° - B) = -\frac{n}{m+n}$. Отсюда

$$\cos C = \sqrt{\frac{1 + \cos 2C}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2(m+n)}}.$$

Отв. $B = \arccos \frac{n}{m+n}$;

$$C = \arccos \sqrt{\frac{m}{2(m+n)}} \left[= \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{n}{m+n}\right)\right].$$

574. Окружность разделится на четыре попарно равные дуги $AB = BC$ и $CD = DA$ (черт. 58). Пусть дуга BC содержит меньше чем 90° (мы оставляем в стороне простейший случай $m:n = 1$, когда все дуги содержат по 90°). Найдём центральный угол $\alpha = \angle BOC$, измеряющийся дугой BC. По условию $DE : EB = m : n$. Приняв за единицу измерения длин величину $\frac{DE}{m}$, будем иметь $DE = m$ и $EB = n$. Значит,

$$\frac{DB}{2} = \frac{m+n}{2}$$

и

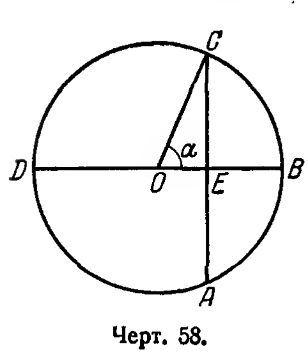
$$OE = DE - DO = m - \frac{m+n}{2} = \frac{m-n}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{OE}{OC} = \frac{m-n}{m+n}$$

и

$$\alpha = \arccos\frac{m-n}{m+n}.$$



Черт. 58.

Дуга CD содержит $180° - \arccos\frac{m-n}{m+n}$ (градусов), т. е.

$$\pi - \arccos\frac{m-n}{m+n} \text{ (радианов).}$$

Отв. Дуга, меньшая чем $\frac{\pi}{2}$, равна $\arccos\frac{m-n}{m+n}$ $(m > n)$; дуга, большая чем $\frac{\pi}{2}$, равна

$$\pi - \arccos\frac{m-n}{m+n} = \arccos\frac{n-m}{m+n}.$$

575. Пусть α (черт. 59) есть угол параллелограмма. Тогда

$$h_1 = BM = AB \cdot \sin\alpha$$

и

$$h_2 = BN = BC \cdot \sin\alpha.$$

Черт. 59.

Значит, $h_1 + h_2 = (AB + BC)\sin\alpha = p\sin\alpha$, откуда $\sin\alpha = \frac{h_1 + h_2}{p}$. Если α — острый (или прямой) угол,

то $\alpha = \arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$. Тогда тупой (или прямой) угол параллелограмма будет $\pi - \arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$.

Замечание. Задача не имеет решения, если $h_1 + h_2 > p$. Если же $h_1 + h_2 \leqslant p$, то задача имеет решение (при $h_1 + h_2 = p$ имеем прямоугольник).

Отв. Один из углов равен $\arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$, другой $\pi - \arcsin \frac{h_1 + h_2}{p}$.

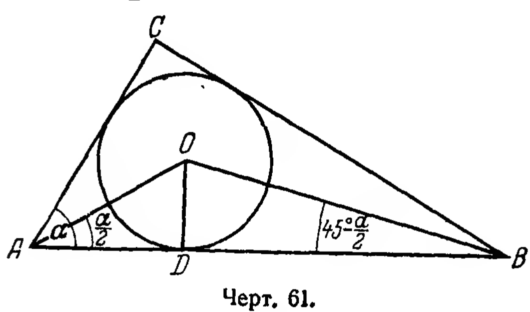
576. По условию $BD : BE = 40 : 41$ (черт. 60). Примем за единицу длины $\frac{1}{40}$ часть BD. Тогда $BD = 40$, $BE = 41$. Так как треугольник ABC прямоугольный и BE — медиана прямого угла, то $AE = BE = 41$. Треугольник BDE прямоугольный, поэтому

$$DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = 9.$$

Черт. 60.

Следовательно, $AD = AE - DE = 32$. Из подобия треугольников ABD и ABC находим $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$.

Отв. $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$.



Черт. 61.

577. Так как AO (черт. 61) есть биссектриса угла $\alpha = \angle CAD$, то $\angle BAO = \frac{\alpha}{2}$. Таким же образом получаем

$\angle ABO=\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha)=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Из треугольников AOD и BOD имеем

$$AD=OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

и

$$DB=OD\cdot\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Следовательно,

$$c=AB=AD+DB=OD\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Отсюда находим

$$r=\frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Знаменатель можно преобразовать к виду, удобному для логарифмирования:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

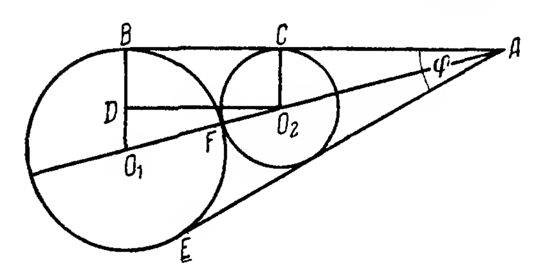
$$=\frac{\sin 45^\circ}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отв. $r=c\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

578. Обозначим стороны треугольника через a, b и c и пусть $a=7$ *см*, $b=24$ *см*, а $c=25$ *см*. Так как $a^2+b^2=c^2$, то данный треугольник прямоугольный. Следовательно, радиус R описанного круга равен $\frac{c}{2}$. Радиус вписанного круга найдём по формуле $r=\frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, а p — полупериметр.

Отв. $R=12{,}5$ *см*, $r=3$ *см*.

579. По условию $\angle BAE = \varphi$ (черт. 62). Следовательно,



Черт. 62.

$\angle BAO_1 = \frac{\varphi}{2}$. Требуется определить $R = O_1B$ и $r = O_2C$.

Имеем

$$R + r = O_1F + FO_2 = O_1O_2 = d$$

и

$$R - r = O_1B - O_2C = O_1D.$$

Из прямоугольного треугольника O_1DO_2, где

$$\angle O_1O_2D = \angle BAO_1 = \frac{\varphi}{2},$$

находим

$$O_1D = O_1O_2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \text{ т. е. } R - r = d\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Из двух полученных уравнений находим

$$R = \frac{d\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2}$$

и

$$r = \frac{d\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2}.$$

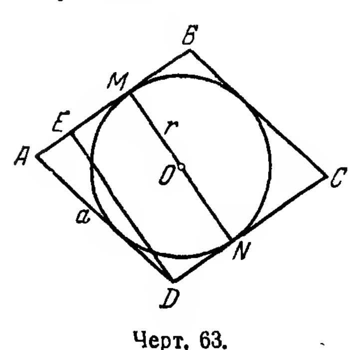
Заменяя $\sin\frac{\varphi}{2}$ через $\cos\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right)$, можно преобразовать эти выражения.

Отв. $R = d\cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$, $r = d\sin^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$.

580. Из черт. 63 имеем

$$\sin \angle BAD = \frac{DE}{AD} = \frac{MN}{AD} = \frac{2r}{a}.$$

По условию $MN \cdot DC = Q$, т. е. $2ra = Q$ и, кроме того, $\pi r^2 = S$. Из этих уравнений можно определить отдельно r и a, но так как нам нужно знать лишь отношение $\frac{r}{a}$, то лучше разделить почленно второе уравнение на первое. Получим $\frac{\pi r}{2a} = \frac{S}{Q}$, откуда $\frac{r}{a} = \frac{2S}{\pi Q}$.



Черт. 63.

Отв. $\angle BAD = \arcsin \frac{4S}{\pi Q}$.

581. Площадь правильного вписанного $2n$-угольника равна $nR^2 \sin \frac{180^\circ}{n}$. Площадь правильного описанного n-угольника равна $nR^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$. По условию

$$nR^2\left(\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n}\right) = P.$$

Отсюда

$$R = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{n(\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)}},$$

где $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$. Выражение $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha$ можно преобразовать так:

$$\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha\,(1 - \cos \alpha) = 2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отв. $R = \sqrt{\dfrac{P}{n\left(\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n}\right)}} = \dfrac{1}{\sin \frac{90^\circ}{n}} \sqrt{\dfrac{P \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{2n}}.$

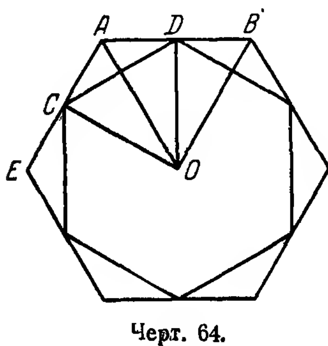
582. Правильные одноимённые многоугольники подобны; поэтому (черт. 64) площади их (S_1 — площадь вписанного многоугольника, S_2 — площадь описанного) относятся, как квадраты радиусов

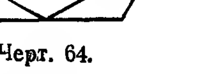
$$S_1 : S_2 = OD^2 : OA^2.$$

Но из треугольника OAD имеем

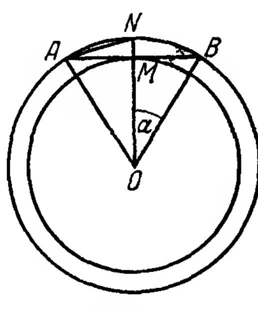
$$\frac{OD}{OA} = \cos \angle DOA = \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Отв. $S_1 : S_2 = \cos^2 \frac{180^\circ}{n}$.





Черт. 64.



Черт. 65.

583. Пусть $AB = a$ (черт. 65) есть сторона правильного n-угольника. Тогда

$$\angle BON = \alpha = \frac{180^\circ}{n},$$

а

$$\angle NAM = \frac{\alpha}{2} = \frac{90^\circ}{n}$$

(как вписанный, опирающийся на дугу α). Площадь Q кольца равна

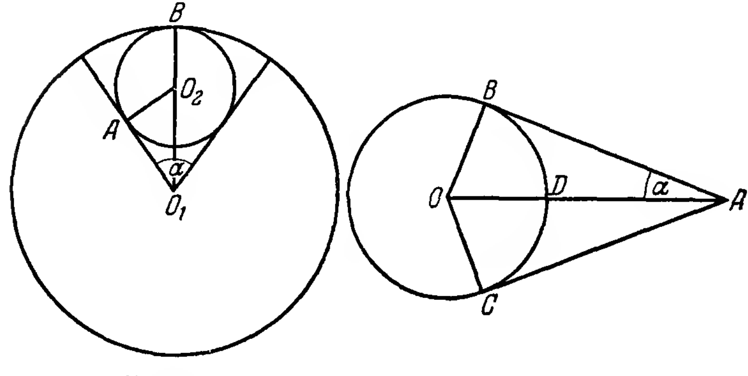
$$Q = \pi (OA^2 - OM^2) = \pi \cdot AM^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Ширину d кольца можно найти из треугольника NAM.

Отв. $Q = \frac{\pi a^2}{4}$; $d = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{n}$.

584. Обозначим искомый радиус через x, так что (черт. 66) $O_2A = O_2B = x$. Из прямоугольного треугольника O_1O_2A, где $\angle O_2O_1A = \frac{\alpha}{2}$ и $O_1O_2 = O_1B - O_2B = R - x$, имеем $O_2A = O_1O_2 \sin\frac{\alpha}{2}$, т. е. $x = (R - x)\sin\frac{\alpha}{2}$.

Отв. $x = \dfrac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}$.



Черт. 66. Черт. 67.

585. Площадь S_1 четырёхугольника $ABOC$ (черт. 67) равна $2\cdot\frac{1}{2}OB\cdot AB = R^2\operatorname{ctg}\alpha$. Из неё нужно отнять площадь S_2 сектора $COBD$, центральный угол которого равен $(180 - 2\alpha)^\circ$. Имеем

$$S_2 = \pi R^2\frac{180-2\alpha}{360} = \pi R^2\frac{90-\alpha}{180}$$

(α — градусная мера).

Отв. $S = S_1 - S_2 = R^2\left[\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\alpha'}{180}\right]$, где α — градусная мера угла или

$$S = R^2\left[\operatorname{ctg}\alpha' - \frac{\pi}{2} + \alpha'\right],$$

где α' — радианная мера угла.

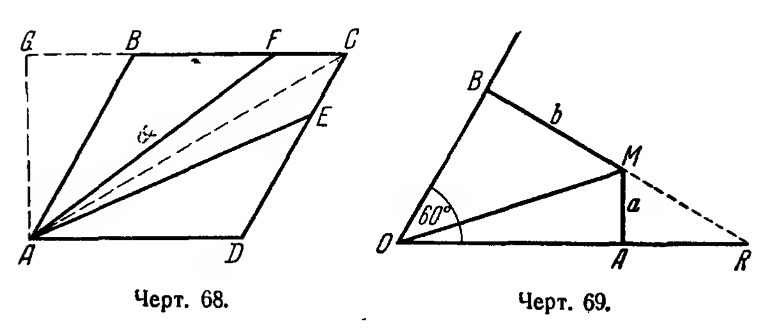
586. По условию площадь треугольника ABF (черт. 68) составляет $\frac{1}{3}$ площади ромба $ABCD$, т. е. $\frac{2}{3}$ площади треугольника ABC. Так как треугольники ABC и ABF имеют общую высоту AG, то

$$BF=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}a.$$

Поэтому

$$AF^2=AB^2+BF^2-2AB\cdot BF\cos(180^\circ-\alpha)=$$
$$=a^2+\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{3}a^2\cos\alpha.$$

Отв. $AF=AE=\frac{a}{3}\sqrt{13+12\cos\alpha}.$



Черт. 68. Черт. 69.

587. Продолжим BM (черт. 69) до пересечения со стороной OA угла AOB в точке R. Из треугольника AMR, где $\angle AMR=\angle AOB=60^\circ$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), находим $MR=2AM=2a$. Следовательно, $RB=RM+MB=2a+b$. Теперь из треугольника ROB, где $OR=2OB$, находим $(2OB)^2-OB^2=(2a+b)^2$. Следовательно,

$$OB=\frac{2a+b}{\sqrt{3}}.$$

Искомое расстояние OM определяется из треугольника OBM.

Отв. $OM=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$

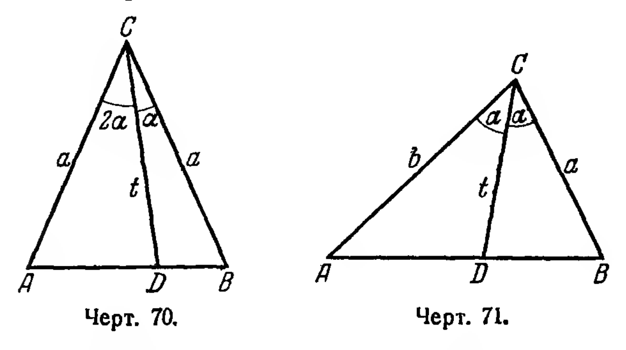
588. Положим $\angle BCD = \alpha$ (черт. 70). По условию $\angle ACD = 2\alpha$, так что $\angle ACB = 3\alpha$ и $\angle BAC = \angle ABC = 90° - \frac{3\alpha}{2}$. Из треугольника BCD, где $\angle BDC = 90° + \frac{\alpha}{2}$, находим

$$\frac{t}{a} = \frac{\sin\left(90° - \frac{3\alpha}{2}\right)}{\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\text{ [1]}.$$

Отсюда $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{t+3a}{4a}}$. Далее вычисляем $\sin\frac{\alpha}{2}$, затем $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ и находим

$$S = \frac{1}{2}a^2\sin 3\alpha = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\,(3 - 4\sin^2\alpha).$$

Отв. $S = \frac{t}{4a}(2a+t)\sqrt{(3a+t)(a-t)}$.



Черт. 70. Черт. 71.

589. При обозначениях чертежа 71 имеем

$$AD^2 = b^2 + t^2 - 2bt\cos\alpha \quad \text{и} \quad DB^2 = a^2 + t^2 - 2at\cos\alpha,$$

а по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника $\frac{AD^2}{DB^2} = \frac{b^2}{a^2}$. Получаем уравнение

$$\frac{b^2 + t^2 - 2bt\cos\alpha}{a^2 + t^2 - 2at\cos\alpha} = \frac{b^2}{a^2},$$

---

[1] По формуле косинуса тройного угла $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; если она неизвестна читателю, то её легко вывести из формул для $\cos(2\alpha + \alpha)$, $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

из которого находим $\cos\alpha = \frac{(a+b)t}{2ab}$; затем находим $\sin\alpha$ и

$$S = \frac{1}{2}ab\sin 2\alpha = ab\sin\alpha\cos\alpha.$$

Отв. $S = \frac{(a+b)t}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2t^2}$.

590. Обозначим искомый угол через φ (черт. 72). Пусть угол B — больший из двух углов A и B. Тогда

$$\angle BCO = \angle BCE + \varphi = 90^\circ - B + \varphi,$$

а

$$\angle ACO = \angle ACE - \varphi = 90^\circ - A - \varphi.$$

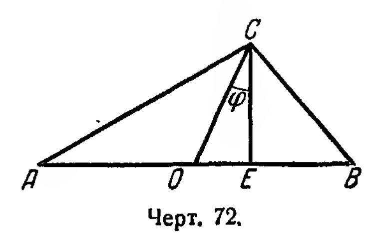
Применив теорему синусов к треугольнику AOC, получим

$$\frac{1}{2}AB : OC = \sin\angle ACO : \sin A.$$

Аналогично из треугольника BOC получим

$$\frac{1}{2}AB : OC = \sin\angle BCO : \sin B.$$

Приравняв правые части и подставив найденные выражения



Черт. 72.

углов ACO и BCO, получаем уравнение

$$\frac{\cos(A+\varphi)}{\sin A} = \frac{\cos(B-\varphi)}{\sin B},$$

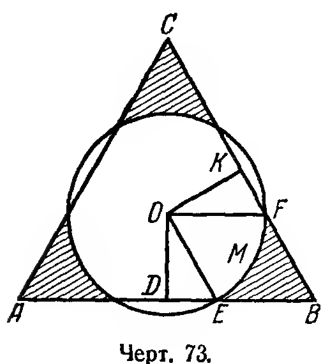
которое приводится к уравнению

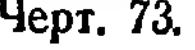
$$2\sin\varphi = \cos\varphi(\operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}B).$$

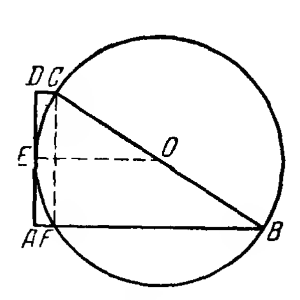
Отв. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}B)$.

591. Искомая площадь S (заштрнхованная на черт. 73) равиа утроенной площади фигуры $EMFB$. По условию $OE = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}$. В прямоугольном треугольнике OED катет OD (радиус вписанного круга) равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; следовательно, $OD = OE\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, $\angle DEO = 60°$. Точно так же $\angle KFO = 60°$. Так как угол EBF тоже равен 60°, то $EO \parallel BF$ и $OF \parallel BE$, и четырёхугольник $OEBF$ есть ромб со стороной $\frac{a}{3}$ и с углом 60° при вершине O. Вычитаем площадь сектора EOF, равную $\frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2$, из площади ромба $\left(\frac{a}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, и разность утраиваем.

Отв. $S = \frac{a^2}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$.




Черт. 73.



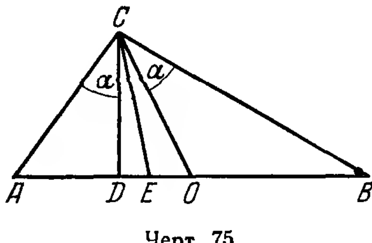
Черт. 74.

592. Требуется найти $S = \frac{1}{2}AB \cdot DC$ (черт. 74). Угол CFB — прямой (как вписанный, опирающийся на диаметр). Следовательно, $DC = AF$, так что $S = \frac{1}{2}AB \cdot AF$. Но по свойству секущей имеем

$$AB \cdot AF = AE^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Отв. $S = \frac{h^2}{8}$.

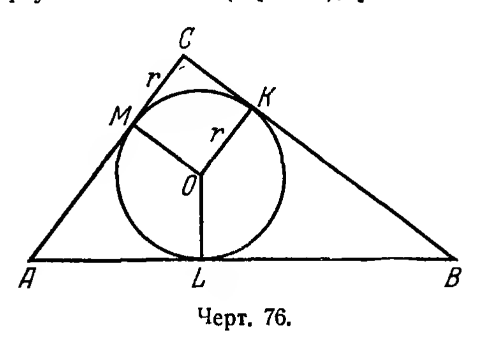
593. Так как $\angle DCA = \angle OBC$ (черт. 75) и $\angle BCO = \angle OBC$ (ибо медиана OC равна половине гипотенузы), то $\angle DCA = \angle BCO$. Но по условию $\angle ACE = \angle BCE$.



Черт. 75.

Вычитая из этого равенства предыдущее, получаем $\angle DCE = \angle OCE$, т. е. CE делит пополам угол DCO.

594. Диаметр $2R$ окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC (черт. 76), равен гипотенузе AB.



Черт. 76.

Диаметр $2r$ вписанной окружности равен $MC + CK$ (так как $MOKC$ есть квадрат). Следовательно,

$$AC + BC = (AM + BK) + (MC + CK) = \\ = (AL + LB) + (MC + CK) = 2R + 2r.$$

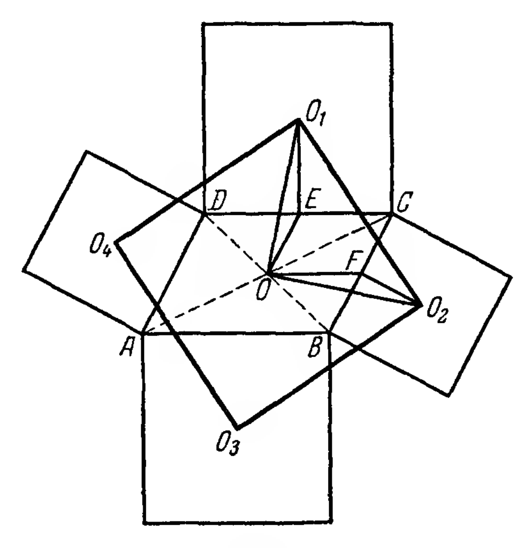
595. Как в задаче **594**, докажем, что $a + b = 2(r + R)$, т. е. $a + b = 2\left(\frac{2}{5}R + R\right) = \frac{7}{5}c$. Кроме того, $a^2 + b^2 = c^2$.

Отсюда

$$a=\frac{3}{5}c,\ b=\frac{4}{5}c\ \left(\text{или}\ a=\frac{4}{5}c,\ b=\frac{3}{5}c\right).$$

Отв. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\sin B=\frac{4}{5}$.

596. Построим (черт. 77) треугольники OEO_1 и OFO_2 (точки E и F — середины сторон параллелограмма). Эти треугольники равны. Действительно, $OE=FC$, а из условия следует, что $FC=O_2F$. Следовательно, $OE=O_2F$. Так же докажем, что $O_1E=OF$. Углы OEO_1 и OFO_2 (оба они ту-



Черт. 77.

пые) равны, так как их стороны взаимно перпендикулярны. Из равенства треугольников OEO_1 и OFO_2 следует, что $OO_1=OO_2$ и что $\angle OO_1E=\angle O_2OF$. А так как O_1E и OF образуют прямой угол, то и прямые OO_1 и OO_2 образуют прямой угол. Значит, треугольник O_1O_2O — равнобедренный и прямоугольный. Таковы же и треугольники O_2O_3O, O_3O_4O и O_4O_1O. Отсюда следует, что $O_1O_2O_3O_4$ есть квадрат.

ГЛАВА 9
МНОГОГРАННИКИ

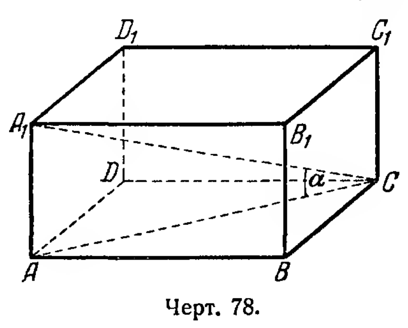
В этой и следующей главах приняты такие обозначения:

V — объем,
S или $S_{осн}$ — площадь основания,
$S_{бок}$ — боковая поверхность,
$S_п$ — полная поверхность,
a — сторона основания,
r — радиус окружности, вписанной в основание,
R — радиус окружности, описанной около основания,
H — высота тела,
h — высота основания.

Если указанные величины обозначаются иначе, это каждый раз оговаривается.

На изображениях пространственных фигур мелким пунктиром обозначены невидимые линии; крупным пунктиром изображены вспомогательные линии.

597. Проекция диагонали A_1C параллелепипеда (черт. 78) на плоскость основания $ABCD$ есть AC (диагональ основа-



Черт. 78.

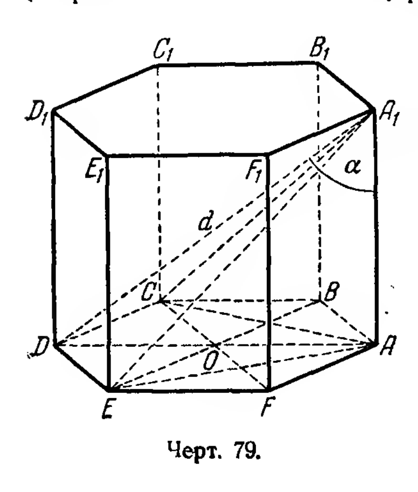
ния). Поэтому угол α между A_1C и плоскостью $ABCD$ измеряется углом A_1CA. Из треугольника AA_1C находим

$$AA_1 = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставляем в формулу $S_{бок} = (2a + 2b) \cdot AA_1$.

Отв. $S_{бок} = 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} \alpha$.

598. Из каждой вершины призмы, например из вершины A_1 (черт. 79), можно провести три диагонали (A_1E, A_1D, A_1C). Они проектируются на плоскость $ABCDEF$ диагоналями основания (AE, AD, AC). Из наклонных A_1E, A_1D, A_1C — наибольшая та, у которой проекция — самая большая. Следовательно, наибольшая из трёх взятых диагоналей есть A_1D (в призме есть ещё диагонали, равные A_1D, но бóльших нет).



Черт. 79.

Из треугольника A_1AD, где $\angle DA_1A = \alpha$ и $A_1D = d$, находим $H = AA_1 = d\cos\alpha$, $AD = d\sin\alpha$. Площадь равностороннего треугольника AOB равна $\frac{1}{4}\cdot AO^2\cdot\sqrt{3}$. Следовательно,

$S_{осн} = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot OA^2\cdot\sqrt{3} = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{AD}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}$. Объём $V = S\cdot H = \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot AD^2\cdot AA_1$.

Отв. $\frac{3\sqrt{3}}{8}d^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

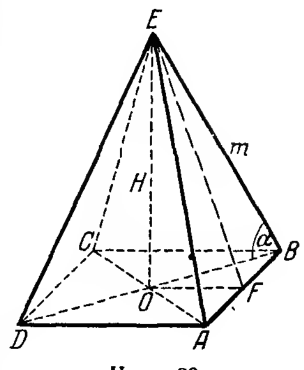
Замечание[1]). Для изображения правильного шестиугольника (основания призмы) можно построить произвольный параллелограмм $BCDO$. Откладывая на продолжениях прямых DO, CO, BO отрезки $OA = OD$, $OF = OC$ и $OE = OB$, получаем шестиугольник $ABCDEF$. Точка O изображает центр.

---

[1]) Наглядность чертежа часто облегчает решение задачи. Поэтому в ряде задач указаны способы изображения пространственных фигур на плоскости. Они могут дать хороший чертёж даже при построении от руки.

Изображения даются в параллельной проекции: направление проектирования — произвольное. При таком проектировании изображениями параллельных прямых служат параллельные прямые (но изображения перпендикулярных прямых, как правило, не перпендикулярны). Равные отрезки, отложенные на одной прямой или на параллельных прямых, остаются равными и на изображении (но длина их, как правило, меняется). Равные отрезки, отложенные на непараллельных прямых, могут изображаться неравными отрезками.

599. а) Способ изображения. Квадрат, лежащий в основании, изображается произвольным параллелограммом $ABCD$ (черт. 80). Точка O пересечения диагоналей изображает центр квадрата. Соединяя середину F стороны AB с вершиной пирамиды E, получаем изображение EF апофемы.



Черт. 80.

б) Решение. Имеем

$$V = \frac{1}{3}x^2H,$$

где x — сторона основания (AB на черт. 80) и H — высота пирамиды (OE). Угол α есть $\angle EBO$ (см. решение задачи **597**). Из треугольника EBO находим $H = m\sin\alpha$; из треугольника OAB

$$x = OB \cdot \sqrt{2} = m\sqrt{2} \cdot \cos\alpha.$$

Отв. $V = \frac{2}{3}m^3\cos^2\alpha\sin\alpha = \frac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$.

600. Обозначив через m искомое боковое ребро, найдём, как в предыдущей задаче,

$$V = \frac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}.$$

Отсюда определяем m.

Отв. $m = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sin 2\alpha\cos\alpha}}$.

601. Введём обозначения $AB = x$; $EF = y$ (черт. 80). Тогда имеем $S = 2xy$. Из прямоугольного треугольника OEF, где $OE = H$, находим $y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + H^2$. По исключении y из найденных уравнений получаем $x^4 + 4H^2x^2 - S^2 = 0$. Это уравнение имеет два действительных решения, но лишь одно из них положительно.

Отв. $x = \sqrt{\sqrt{4H^4 + S^2} - 2H^2}$ *см.*

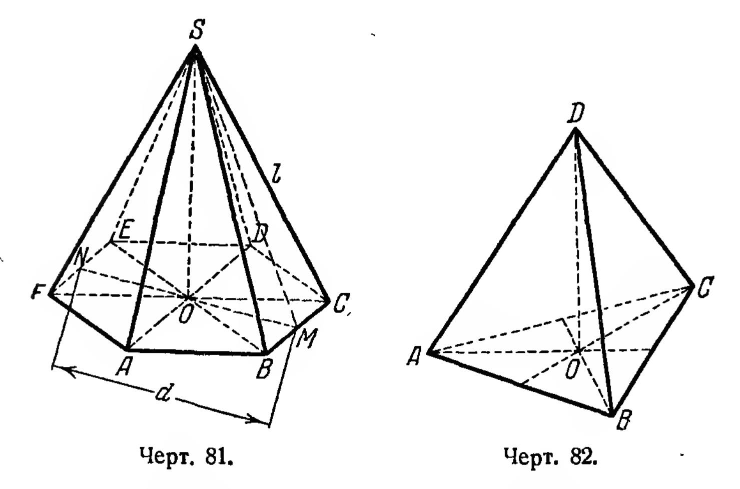
602 [1]). Соединив середины M и N (черт. 81) сторон BC и FE, получаем изображение MN диаметра вписанного круга, так что $MN = d$ и $OM = \frac{d}{2}$. Так как OM есть высота равностороннего треугольника со стороной $a (= BC = OC = OB)$, то $\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Высоту $H = OS$ находим из треугольника SCO:

$$H = \sqrt{CS^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - a^2} = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{3}}.$$

Апофему $m = SM$ пирамиды находим из треугольника SCM:

$$m = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{12l^2 - d^2}.$$

Отв. $V = \frac{d^2}{6}\sqrt{3l^2 - d^2}$, $S_{бок} = \frac{d}{2}\sqrt{12l^2 - d^2}$.



Черт. 81. Черт. 82.

603. а) Способ изображения. Основание можно изобразить любым треугольником ABC (черт. 82). Центр основания изображается точкой O пересечения медиан [2]).

---

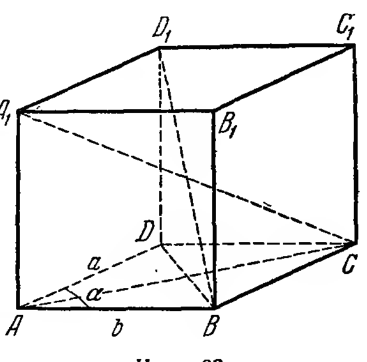
[1]) Об изображении правильного шестиугольника см. на стр. 328 замечание к задаче **598**.

[2]) Затем две из этих медиан, как не имеющие значения для решения задачи, можно стереть, оставив только точку O на медиане AE, как это сделано на черт. 85 на стр. 333.

б) Решение. Имеем $V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} H$. Связь между a и H найдём из треугольника AOD, где $AD = a$, а AO есть радиус R круга, описанного около основания, так что $a = R\sqrt{3}$. Имеем $H^2 = AD^2 - AO^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3} a^2$. Подставляя $a^2 = \frac{3}{2} H^2$ в выражение V, получаем $V = \frac{\sqrt{3}}{8} H^3$.

Отв. $H = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{3}}}$.

604. а) Способ изображения. В отличие от прямоугольного параллелепипеда, все грани которого — прямоугольники, в прямом параллелепипеде в основании находится параллелограмм, а прямоугольниками являются только четыре боковые грани. Но при изображении прямоугольного параллелепипеда (см. черт. 78 на стр. 327) мы вынуждены изображать основание также в виде параллелограмма. Поэтому чертёж прямого параллелепипеда по существу ничем не отличается от чертежа прямоугольного параллелепипеда, и это создаёт дополнительные трудности при пользовании чертежом: необходимо помнить, что острый угол параллелограмма на чертеже является острым и в самом деле у изображённой фигуры. Для бóльшей ясности рекомендуется на чертеже делать этот угол очень острым, как на черт. 83, и обязательно отмечать его буквой (в данном случае — буквой α).



Черт. 83.

б) Решение. В прямом параллелепипеде диагонали (всего их четыре) попарно равны: $A_1C = AC_1$ и $BD_1 = B_1D$ (на черт. 83 AC_1 и DB_1 не проведены). Пусть острый угол основания $ABCD$ есть $\angle DAB = \alpha$; тогда $\angle ABC = 180° - \alpha$ тупой, и $AC > BD$. Значит, меньшая диагональ параллеле-

пипеда есть BD_1 (ибо $BD_1^2 = H^2 + BD^2$, тогда как $A_1C^2 = H^2 + AC^2$; следовательно, $BD_1^2 < A_1C^2$). Из условия $BD_1 = AC$ можно найти H. Именно, из треугольника BDD_1 имеем

$$H^2 = BD_1^2 - BD^2 = AC^2 - BD^2.$$

Из треугольника ABD находим

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

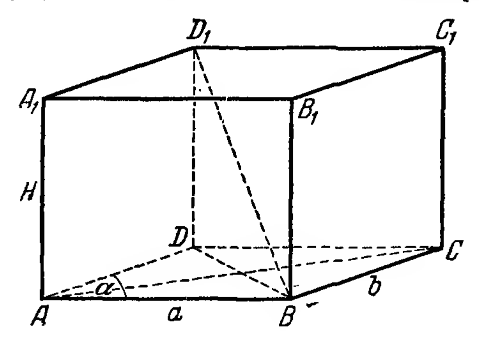
а из треугольника ABC находим

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha).$$

Следовательно, $H^2 = 4ab\cos\alpha$.

Отв. $V = 2\sin\alpha\sqrt{(ab)^3\cos\alpha}$.

605. Обозначим бо́льшую сторону основания (AB на черт. 84) через a, меньшую (BC) — через b. По условию $a + b = 9$ (*см*). Чтобы найти a, b, а также острый угол α,



Черт. 84.

вычислим диагонали основания. Как доказано в решении предыдущей задачи, меньшая диагональ $[BD_1 = \sqrt{33}$ (*см*)$]$ параллелепипеда проектируется на плоскость основания диагональю BD. Поэтому

$$BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2 = (\sqrt{33})^2 - 4^2 = 17 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Точно так же найдём $AC^2 = 65$ (*см*²). Получаем два уравнения

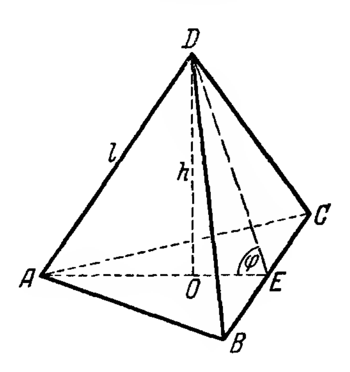
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 17; \quad a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = 65.$$

Складывая их, находим $a^2+b^2=41$, что вместе с $a+b=9$ даёт $a=5$, $b=4$ (мы обозначили через a бóльшую сторону). Вычитая, находим $4ab\cos\alpha=48$, т. е. $\cos\alpha=$ $=\frac{48}{4\cdot5\cdot4}=0,6$. Следовательно,

$$S_{\text{осн}}=ab\sin\alpha=4\cdot5\cdot0,8=16\ (см^2).$$

Отв. $V=64$ *см*^{3}, $S_п=104$ *см*^{2}.

606. а) Способ изображения. О построении точки O см. в задаче **603** (черт. 82 на стр. 330). Чтобы построить линейный угол двугранного угла при ребре BC



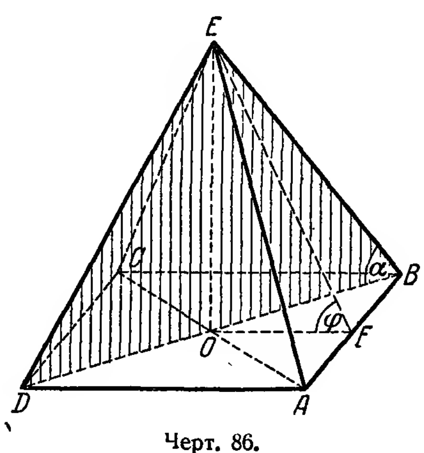
Черт. 85.

(черт. 85), соединим середину E отрезка BC с точками D и A. Точка E является изображением середины ребра; так как треугольники CDB и CAB — равнобедренные (в натуре), то DE и AE перпендикулярны к BC, т. е. $\angle DEA=$ $=\varphi$ — искомый линейный угол. Высота пирамиды $DO=h$ лежит в плоскости DEA.

б) Решение. Имеем $\operatorname{tg}\varphi=\frac{OD}{OE}$, где $OD=h$, а $OE=$ $=\frac{1}{2}\cdot AO$ (медианы делятся в отношении 1:2). AO находим из треугольника AOD, где $AD=l$.

Отв. $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{\sqrt{l^2-h^2}}$.

607. Угол α измеряется углом OBE (черт. 86), так как OB — проекция ребра BE на плоскость основания. Для построения линейного угла φ двугранного угла при ребре AB соединим середину F стороны AB с O и E (см. объяснение



Черт. 86.

к задаче **606**). Так как $S_{осн} = a^2 = \frac{d^2}{2}$, то для вычисления V нужно найти $H = OE$ и $d = BD$. Из треугольника OBE находим $H = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha$ и, по условию, $\frac{d}{2} H = S$. Перемножив эти равенства, а затем разделив их почленно, найдём

$$H^2 = S \operatorname{tg} \alpha \text{ и } \left(\frac{d}{2}\right)^2 = S \operatorname{ctg} \alpha.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \frac{2}{3} \cdot S^{\frac{3}{2}} \operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}} \alpha.$$

Угол φ определяем из треугольника OFE, где

$$OF = \frac{a}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}},$$

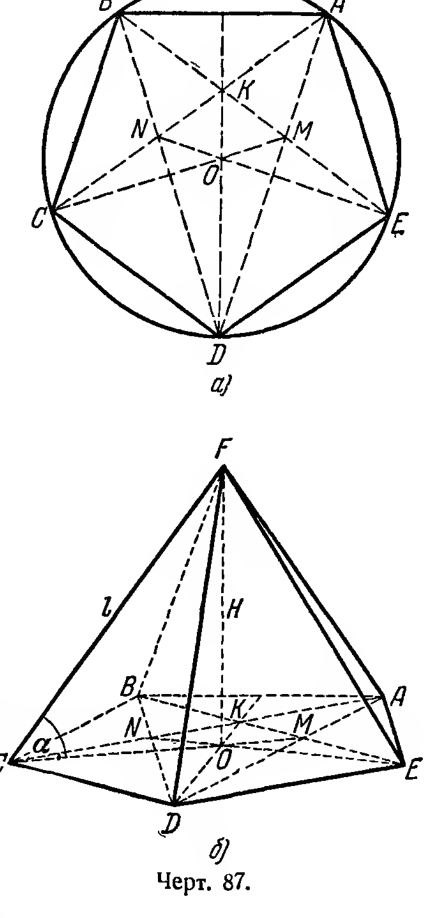
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OE}{OF} = H : \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{2} = \sqrt{S \operatorname{tg} \alpha} : \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{S \operatorname{ctg} \alpha} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отв. $V = \frac{2}{3} S^{\frac{3}{2}} \operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}} \alpha$; $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$.

608. а) Способ изображения. Основание пирамиды есть правильный пятиугольник (из уравнения

$$180^\circ(n-2)=540^\circ$$

находим $n=5$). А в правильном пятиугольнике $ABCDE$ (черт. 87, *а*) каждая диагональ (например AD) делится каждой другой (например BE) в крайнем и среднем отношении, так что $DM=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AD\approx 0{,}6\ AD$. Кроме того, каждая диагональ параллельна одной из сторон (например $AD \parallel BC$). Центр O лежит на пересечении CM и EN. Поэтому изображение правильного пятиугольника можно построить следующим образом.



Черт. 87.

Строим произвольный треугольник ABD (черт. 87, *б*). Делим стороны AD и BD точками M и N в крайнем и среднем отношении — приблизительно в отношении

$$AM:MD=2:3;$$

достаточно разделить одну сторону и провести $MN \parallel AB$. Проводим $AE \parallel BD$ до пересечения с продолжением прямой BM в точке E. Аналогично строится точка C. Изображение центра O лежит в пересечении CM и EN.

б) Решение. Из треугольника COF, в котором $\angle OCF=\alpha$ и $CF=l$, находим $H=OF=l\sin\alpha$; $OC=l\cos\alpha$. Площадь

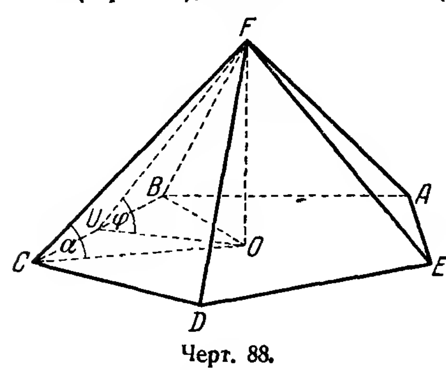
основания

$$S = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD = \frac{5}{2} \cdot OC^2 \cdot \sin 72^\circ =$$
$$= \frac{5}{2} l^2 \cos^2 \alpha \sin 72^\circ.$$

Отв. $V = \frac{1}{3} SH = \frac{5}{6} l^3 \sin 72^\circ \cos^2 \alpha \sin \alpha.$

609 [1]. Для определения угла α рассмотрим треугольник COF (черт. 88), где $FC = CB = a$ (по условию треугольник CBF равносторонний). Сторона же OC (радиус описанного круга) выражается через a из треугольника COU, где угол COU равен 36° и $CU = \frac{a}{2}$. Имеем $OC = \frac{a}{2 \sin 36^\circ}$, так что

$$\cos \alpha = \frac{OC}{CF} = \frac{1}{2 \sin 36^\circ}.$$



Черт. 88.

Угол φ определяется из треугольника OUF, где $FU = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как высота равностороннего треугольника со стороной a), а $OU = \frac{a \operatorname{ctg} 36^\circ}{2}$ (из треугольника COU). Имеем

$$\cos \varphi = \frac{OU}{FU} = \frac{a \operatorname{ctg} 36^\circ}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\sqrt{3}}.$$

Отв. $\alpha = \arccos \frac{1}{2 \sin 36^\circ}, \quad \varphi = \arccos \frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\sqrt{3}}.$

610. При обозначениях чертежа 88 имеем $BC = a$, $OU = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$. Площадь основания

$$S = \frac{na}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

---

[1]) Об изображении правильного пятиугольника см. в предыдущей задаче.

Из формулы $V=\frac{1}{3}SH$ находим

$$H=\frac{3V}{S}=\frac{12V}{na^2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Обозначив искомый угол OCF через α, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{H}{OC},$$

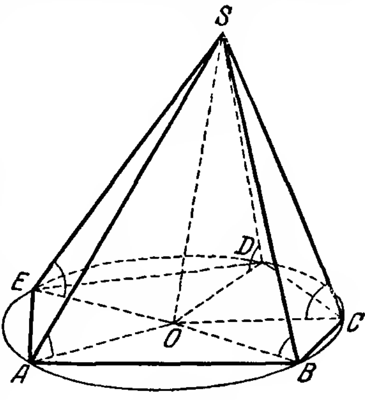
где

$$OC=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Отв. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{24V\sin\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}{na^3}$.

Предварительное замечание к задаче 611 и следующим

Если все боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с основанием, то 1) все боковые рёбра равны; 2) около основания можно описать окружность; 3) высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

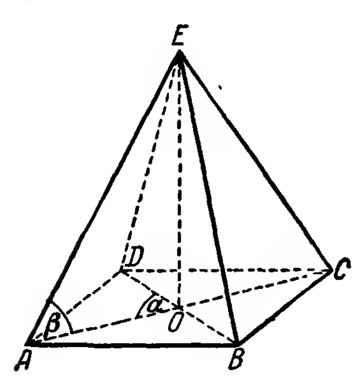


Черт. 89.

Доказательство. Пусть рёбра SA, SB, SC и т. д. (черт. 89) образуют с плоскостью $ABCDE$ равные углы. Рассмотрим прямоугольные треугольники AOS и BOS (OS — высота пирамиды). У них общая высота, а острые углы OAS и OBS равны (так как они измеряют углы наклона рёбер SA, SB к основанию). Следовательно, $AS=BS$. Так же докажем, что $BS=CS$ и т. д. Из тех же треугольников AOS и BOS находим $AO=OB$. Так же докажем, что $OB=OC$ и т. д. Значит, окружность с центром в O и радиусом OA пройдёт через точки B, C и т. д.

611. По доказанному, высота EO проходит через центр описанной окружности, т. е. через точку O пересечения диагоналей

(черт. 90). Площадь всякого параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Поэтому



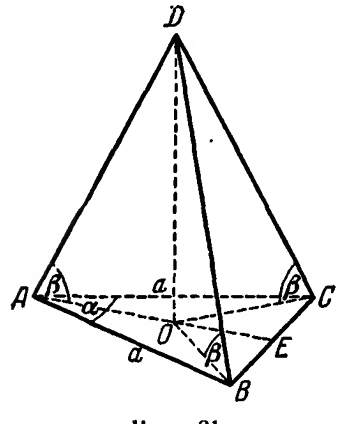
Черт. 90.

$S_{осн}=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha$. Из треугольника AOE находим:

$$H=AO\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Отв. $V=\frac{1}{12}b^3\sin\alpha\operatorname{tg}\beta.$

612. а) Способ изображения. Высота пирамиды, согласно предварительному замечанию (стр. 337), должна проходить через центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC (черт. 91). Поскольку угол $\alpha=\angle CAB$ при вершине остаётся произвольным, изображение центра O можно взять в любой точке отрезка AE (E — середина BC) и даже на продолжении его за точку E (в последнем случае угол α в натуре тупой).



Черт. 91.

б) Решение. Высоту DO определим из треугольника AOD, где $\angle OAD=\beta$, а $AO=R$ есть радиус описанной окружности. Согласно теореме синусов сторона BC равна произведению диаметра $2R$ описанной окружности на синус противоположного угла α, так что $R=\frac{BC}{2\sin\alpha}$. Величина $\frac{BC}{2}=BE$ находится из треугольника ABE $\left(\frac{BC}{2}=a\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Следовательно,

$$H=R\operatorname{tg}\beta=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}.$$

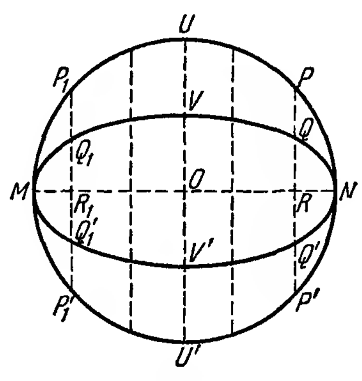
Площадь основания

$$S=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.$$

Отв. $V=\dfrac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{6}$.

613. а) Способ изображения. Окружность изображается в параллельной проекции эллипсом.

Эллипс можно построить следующим образом. Проведём какой-либо диаметр MN окружности (черт. 92) и из произвольной точки P окружности проведём прямую PP',



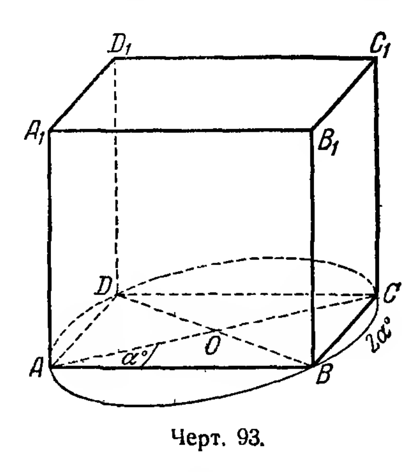
Черт. 92.

перпендикулярную к MN. Пусть R — точка пересечения PP' с MN. Укоротим отрезок RP в каком-либо отношении (например вдвое) и отложим укороченный отрезок RQ на той же прямой PP' по обе стороны от R ($RQ=RQ'$). Поступая так с рядом точек окружности, получим ряд точек эллипса.

Эллипс симметричен относительно MN (*большая ось эллипса*) и относительно прямой UU', проведённой через центр O перпендикулярно к MN (отрезок VV' — *малая ось эллипса*). Точка O называется *центром* эллипса.

Чтобы изобразить окружность, описанную около прямоугольника, удобнее сначала начертить эллипс $ABCD$, изобра-

жающий описанную окружность (черт. 93). При этом большую ось эллипса лучше расположить наклонно[1]). Одну сторону прямоугольника можно изобразить произвольной хордой AB эллипса; эту хорду целесообразно провести горизонтально. Через центр O эллипса проводим прямые BD и AC. Четырёхугольник $ABCD$ есть изображение прямоугольника.



Черт. 93.

б) Решение. Вписанный угол CAB содержит α°, так как опирается на дугу BC в $(2\alpha)^\circ$. Из треугольника BAC имеем $AB = 2R\cos\alpha$; $BC = 2R\sin\alpha$, так что

$$S = 2(AB + BC)H = 4R(\cos\alpha + \sin\alpha)H.$$

Отсюда

$$H = \frac{S}{4R(\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Теперь находим $V = AB \cdot BC \cdot H$. Условие, что дуга $(2\alpha)^\circ$ стягивается меньшей стороной прямоугольника, является излишним.

Отв. $V = \dfrac{SR\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{SR\sin 2\alpha}{\sqrt{8}\cos(45^\circ - \alpha)}$.

---

[1]) На черт. 93 большая ось эллипса принята за диагональ AC прямоугольника. Это упрощает чертёж, но не является обязательным.

614. Площадь основания $S=\frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha$ (черт. 94). По условию

$$S_{бок}=2S=\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha.$$

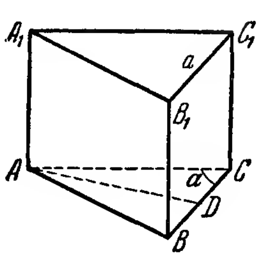
С другой стороны,

$$S_{бок}=\left(a+2\cdot\frac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}\right)H=\frac{2a\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}H.$$

Приравнивая два выражения $S_{бок}$, находим

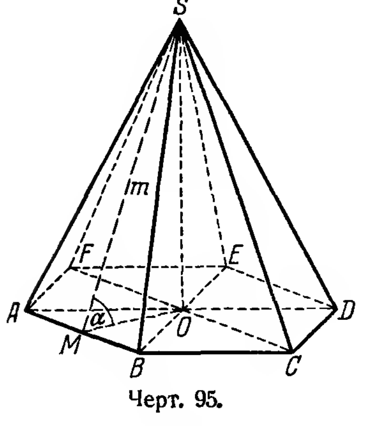
$$H=\frac{a}{4}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отв. $V=\frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.



Черт. 94.

615[1]. Соединим середину M стороны AB с O и S (черт. 95). Угол OMS — линейный для двугранного угла α (см. объяснение к задаче **606**). Следовательно, $OM=SM\cdot\cos\alpha=m\cos\alpha$. Из треугольника AOM, где $\angle AOM=30°$, находим



Черт. 95.

$$AM=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot OM=\frac{\sqrt{3}}{3}m\cos\alpha.$$

Далее находим

$$S_{осн}=6\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}$$

и

$$S_{бок}=6\frac{a}{2}\cdot m.$$

Подставив найденное выражение $\frac{a}{2}$, получим

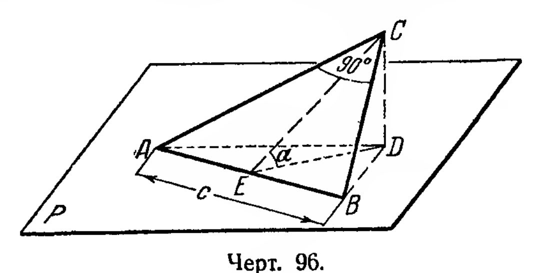
$$S_п=S_{осн}+S_{бок}=2\sqrt{3}m^2\cos\alpha(1+\cos\alpha).$$

Отв. $S_п=4\sqrt{3}\,m^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

---

[1]) Об изображении правильного шестиугольника см. на стр. 328 замечание к задаче **598**.

616. По условию наклонные AC и CB (черт. 96) равны. Значит, равны их проекции: $AD=DB$. Угол DEC (E — середина AB) есть линейный угол двугранного угла α.



Черт. 96.

Так как треугольник ACB прямоугольный при вершине C, то $CE=AE=\frac{c}{2}$. Следовательно, $ED=\frac{c}{2}\cos\alpha$. Наконец,

$$AD=BD=\sqrt{AE^2+ED^2}=\frac{c}{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}.$$

Отв. $S_{ABD}=\frac{c^2\cos\alpha}{4}$,

$$AB+BD+AD=c\left(1+\sqrt{1+\cos^2\alpha}\right).$$

Предварительное замечание к задаче 617 и следующим

Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под одним и тем же углом α, а высота проходит через некоторую точку O основания пирамиды, то

1) высоты всех граней равны;

2) в основание пирамиды можно вписать окружность, центром последней будет точка O;

3) $S_{осн}=S_{бок}\cos\alpha$.

Доказательство. 1) Проведем (черт. 97) высоту FM боковой грани BFC и соединим M с точкой O. Отрезок OM есть проекция FM на плоскость $ABCDE$. Следовательно, он перпендикулярен к BC («теорема о трех перпендикулярах»). Значит, угол OMF — линейный для двугранного угла α. Из треугольника OMF имеем $FM=\frac{OF}{\sin\alpha}$; $OM=OF\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. Если из вершины F провести высоты FL, FN и других боковых граней, то таким же образом найдем, что все они равны $\frac{OF}{\sin\alpha}$.

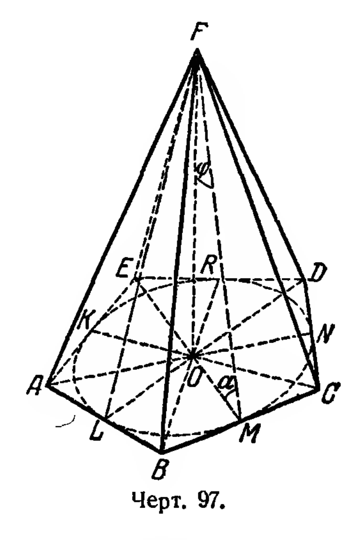
2) Отрезки OL, OM и т. д. будут перпендикулярны соответственно к сторонам AB, BC и т. д. и равны $OF \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Поэтому если провести из центра O окружность радиуса OM, то она будет вписана в основание $ABCDE$.

3) Точка O — основание высоты пирамиды, по доказанному есть центр вписанной окружности.

4) $$S_{OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot OM = \frac{1}{2} BC (FM \cdot \cos \alpha) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} BC \cdot FM\right) \cos \alpha = S_{FBC} \cos \alpha.$$

Точно так же найдём, что $S_{OAB} = S_{FAB} \cos \alpha$, и т. д. Складывая эти равенства, получим $S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cos \alpha$.



Черт. 97.

617. Высота FO всякой пирамиды (черт. 97) проектируется на боковую грань BFC отрезком, лежащим на прямой FM. Поэтому $\angle OFM = \varphi$. Значит, $\alpha = 90° - \varphi$, т. е. все грани наклонены к основанию под одним и тем же углом. По доказанному

$$S_{\text{бок}} = \frac{Q}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\sin \varphi}.$$

Отв. $S_{\text{бок}} = \frac{Q}{\sin \varphi}$, $S_{\text{п}} = Q\left(1 + \frac{1}{\sin \varphi}\right) = \frac{2Q \cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \varphi}$.

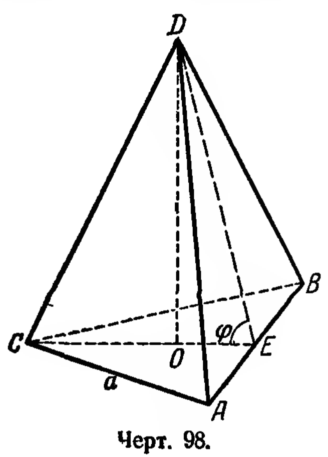
618. Из треугольника DOE (черт. 98)[1]) находим

$$H = OE \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \cdot CE \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Имеем

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \quad \text{и} \quad S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}$$

(см. предварительное замечание к предыдущей задаче).



Черт. 98.

Отв. $V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \varphi}{24}$; $S_{\text{п}} = \frac{a^2 \sqrt{3}\,(1 + \cos \varphi)}{4 \cos \varphi} = \frac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi}$.

Замечание. Общее выражение для полной поверхности пирамиды, у которой все грани наклонены к основанию под одинаковым углом φ, можно записать так:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = S_{\text{осн}} \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi}\right) = \frac{2 S_{\text{осн}} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

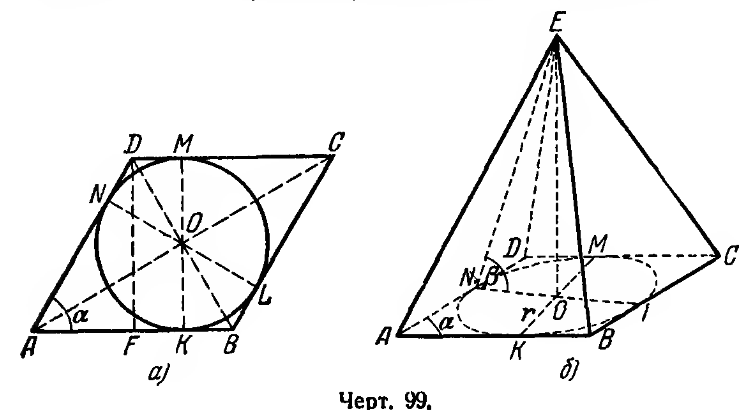
619. Пользуемся формулой $S_{\text{п}} = \frac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi}$, найденной в предыдущей задаче.

Отв. $a = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2S \cos \alpha}{\sqrt{3}}}$.

---

1) Способ изображения — см. черт. 82 на стр. 330.

620. а) Способ изображения. Прямая LN, соединяющая точки касания L и N противоположных сторон ромба (черт. 99, *а*), проходит через центр окружности. Поэтому, начертив сначала эллипс (черт. 99, *б*), изображающий окружность[1]), проведём через центр O две прямые NL и KM. Через концы их N, L, K, M проведём прямые, касающиеся эллипса. Получим параллелограмм $ABCD$, изображающий ромб.



Черт. 99.

б) Решение. Чтобы определить $S_{осн}$, найдём высоту DF ромба и его сторону AB. Из черт. 99, *а* находим $DF = 2\,OK = 2r$; из треугольника AFD, где $\angle A = \alpha$, имеем

$$a = AD = \frac{DF}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Далее находим

$$S_{осн} = AB \cdot DF = a \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}.$$

Из треугольника ONE (черт. 99, *б*), где $ON = r$, а $\angle ONE = \beta$, находим H. Для определения $S_п$ используем замечание к предыдущей задаче.

Отв. $V = \frac{4r^3 \operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha}$; $\quad S_п = \frac{8r^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta}$.

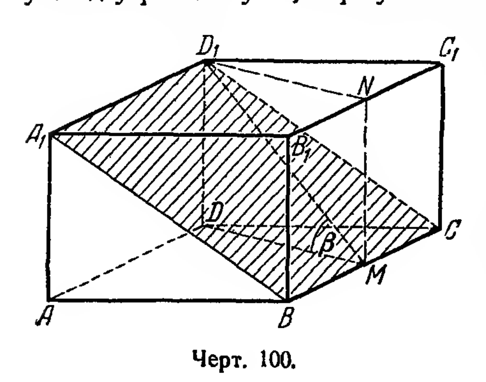
621. Использовать замечание к задаче **618**.

Отв. $\varphi = \arccos\frac{S}{\sigma}$.

---

[1]) О вычерчивании эллипса см. стр. 339—340 (задача 613).

622. а) Способ изображения¹). Сечение есть параллелограмм A_1D_1CB (черт. 100). Чтобы изобразить линейный угол двугранного угла, образуемого сечением A_1D_1CB с плоскостью основания, проведём прямую DM, изображающую высоту ромба $ABCD$. Так как в натуре DM и DD_1 перпендикулярны к ребру AD, то плоскость DD_1NM перпендикулярна к AD, а значит, и к BC. Эта плоскость пересекает плоскость сечения по прямой MD_1, так что



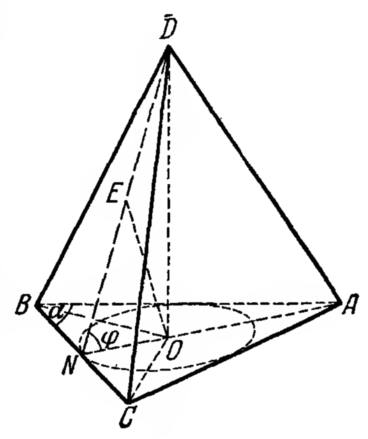
Черт. 100.

$$\angle D_1MD = \beta$$

б) Решение. Боковая поверхность состоит из четырёх равных прямоугольников (так как основание — ромб). Площадь боковой грани A_1D_1DA равна $S_1 = A_1D_1 \cdot DD_1$, а площадь сечения равна $Q = A_1D_1 \cdot D_1M$. Из треугольника DMD_1 имеем $DD_1 = D_1M \cdot \sin\beta$; поэтому $S_1 = Q\sin\beta$.

Отв. $S_{бок} = 4Q\sin\beta$.

623. Учесть предварительное замечание к задаче **617**. По условию $EO = d$ (черт. 101). Точка E (середина гипотенузы ND треугольника NOD) есть центр окружности, описанной около треугольника NOD. Поэтому $ND = 2 \cdot ED = 2 \cdot EO = 2d$. Из треугольника DON, где $\angle OND = \varphi$, находим радиус $ON = r$ круга, вписанного в основание: $r = 2d\cos\varphi$. Чтобы



Черт. 101.

¹) Об изображении прямого параллелепипеда см. стр. 331 (задача 604).

найти $S_{осн}$, определим BN (половину основания равнобедренного треугольника ABC) и AN (его высоту). Центр O вписанного круга лежит на биссектрисе угла ABC, равного α т. е. $\angle OBN = \frac{\alpha}{2}$. Из треугольника BON находим $BN = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Из треугольника ABN находим $AN = BN \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно,

$$S_{осн} = \frac{1}{2} BC \cdot AN = BN \cdot AN = BN^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = $$
$$= 4d^2 \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда (см. замечание к задаче 618) найдём:

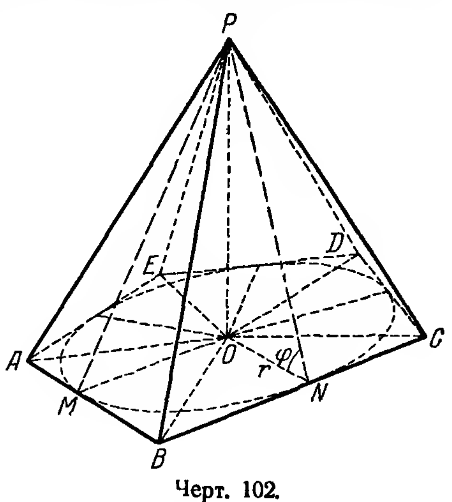
$$S_п = \frac{2S_{осн} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Отв. $S_п = 8d^2 \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

624. Учесть предварительное замечание к задаче 617 [1]): Высоту пирамиды найдём из треугольника ONP (черт. 102). $H = r \operatorname{tg} \varphi$. Если a_1, a_2 и т. д. — стороны основания, то

$$S_{осн} = S_{AOB} + S_{BOC} + \ldots = \frac{1}{2} AB \cdot OM + \frac{1}{2} BC \cdot ON + \ldots = \frac{1}{2} a_1 r + \frac{1}{2} a_2 r + \ldots = \frac{1}{2} r (a_1 + a_2 + \ldots) = \frac{1}{2} r \cdot 2p = rp.$$

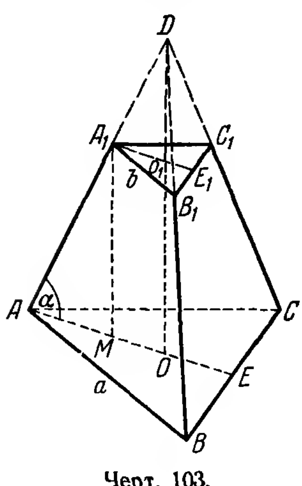
Отв. $V = \frac{r^2 p \operatorname{tg} \varphi}{3}$.



Черт. 102.

[1]) О вычерчивании эллипса (изображения круга, вписанного в основание) см. стр. 339—340 (задача 613).

625. а) Способ изображения. Сделав изображение правильной треугольной пирамиды $DABC$ (черт. 103)[1]), построим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника ABC. Треугольник $A_1B_1C_1$ изображает верхнее основание усечённой пирамиды. Изображение центра O_1 верхнего основания получается в пересечении DO с одной из медиан A_1E_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Отрезок A_1M, параллельный OO_1 и оканчивающийся в точке M, лежащей на медиане AE, изображает высоту усечённой пирамиды, опущенную из точки A_1 (отрезки DA_1, DB_1, DC_1 и DO_1 можно стереть).



Черт. 103.

б) Решение. Объём усечённой пирамиды

$$V = \frac{H}{3}(Q + q + \sqrt{Qq}),$$

где Q и q — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, так что $Q = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; $q = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$. Высоту $H = A_1M$ найдём из треугольника AA_1M, где $\angle MAA_1 = \alpha$ и $AM = AO - A_1O_1$. Но AO и A_1O_1 — это радиусы окружностей, описанных около ABC и $A_1B_1C_1$. Поэтому $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $A_1O_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Значит,

$$AM = \frac{a-b}{\sqrt{3}};$$

следовательно,

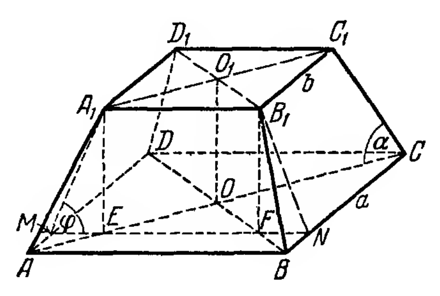
$$H = \frac{a-b}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отв. $V = \frac{1}{12}(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha.$

---

[1]) Об изображении правильной треугольной пирамиды см. стр. 330 (черт. 82).

626. а) Способ изображения. Усечённая пирамида изображается как в предыдущей задаче. Для изображения линейного угла искомого двугранного угла проводим A_1E и B_1F (черт. 104) параллельно OO_1 до пересечения с диагоналями AC и BD. Проводим прямую EF; она будет параллельна AB и пересечёт рёбра AD и BC в точках M и N. Плоскость MA_1B_1N перпендикулярна к ребру AD, так как она проходит



Черт. 104.

через прямые A_1E и MN, перпендикулярные к ребру. Следовательно, $\angle EMA_1 = \varphi$ есть линейный угол двугранного угла при ребре AD.

б) Решение. Из трапеции MA_1B_1N получаем $ME = \frac{a-b}{2}$. Высоту усечённой пирамиды находим из треугольника AEA_1, где $AE = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Имеем

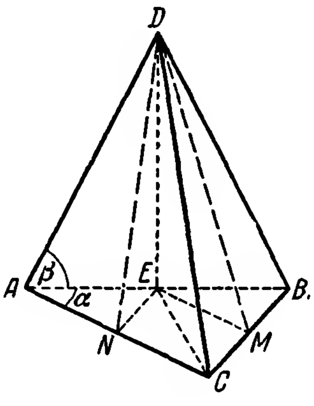
$$H = A_1E = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Объём находим по формуле $V = \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Искомый угол $\varphi = \angle EMA_1$ находим из треугольника A_1ME, где $ME = \frac{a-b}{2}$ (из трапеции MNB_1A_1). Имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1E}{ME} = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha : \frac{a-b}{2}.$$

Отв. $V = \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{2}}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$.

627. См. предварительное замечание к задаче **611** на стр. 337. Высота пирамиды должна проходить через центр окружности, описанной около основания. Но в прямоугольном треугольнике ABC (черт. 105) центр лежит на середине гипотенузы AB в точке E. Следовательно, AE, BE и CE будут проекциями боковых рёбер AD, BD и CD на плоскость основания, так что $\angle DAE = \angle DBE = \angle DCE = \beta$. Объём пирамиды найдём по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC \cdot CB}{2} \cdot DE$. Из $\triangle ABC$



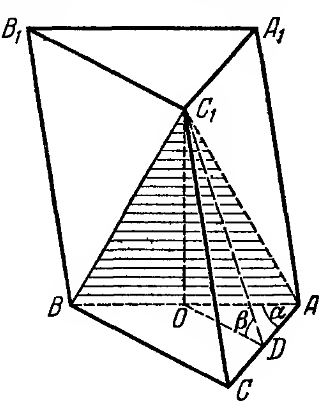
Черт. 105.

имеем $AC = c\cos\alpha$, $BC = c\sin\alpha$; из $\triangle ADE$ находим $DE = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta$. Обозначим плоские углы при вершине: $\angle ADB = \theta_1$, $\angle BDC = \theta_2$ и $\angle ADC = \theta_3$. Так как эти треугольники равнобедренные, то высоты их DE, DM и DN пройдут через середины соответствующих сторон основания. Из $\triangle ABD$ имеем $\angle\theta_1 = 180° - 2\beta$; из $\triangle DBC$ имеем $\sin\frac{\theta_2}{2} = \frac{MB}{BD}$ и из $\triangle ADC$ имеем $\sin\frac{\theta_3}{2} = \frac{AN}{AD}$. Из $\triangle ADE$ находим $AD = DB = \frac{c}{2\cos\beta}$ и из $\triangle ABC$ находим $MB = \frac{BC}{2} = \frac{c}{2}\sin\alpha$ и $AN = \frac{AC}{2} = \frac{c}{2}\cos\alpha$.

Отв. $V = \frac{c^3\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta}{24}$; $\theta_1 = 180° - 2\beta$,

$\theta_2 = 2\arcsin(\sin\alpha\cos\beta)$, $\theta_3 = 2\arcsin(\cos\alpha\cos\beta)$.

628. Требуется найти объём пирамиды C_1ABC (черт. 106). Так как боковые рёбра её равны между собой, то они наклонены к основанию под одним и тем же углом (эта теорема обратна доказанной в предварительном замечании к задаче **611** на стр. 337), и высота C_1O проходит через центр O окружности, описанной около треугольника ABC. Так как этот треугольник прямоугольный, то O лежит на



Черт. 106.

середине гипотенузы AB (см. объяснение к предыдущей задаче). Угол ODC_1 (D — середина катета AC) измеряет наклон боковой грани ACC_1A_1 к основанию. Катеты BC и AC находим из двух уравнений:

$$BC + AC = m \text{ и } BC = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

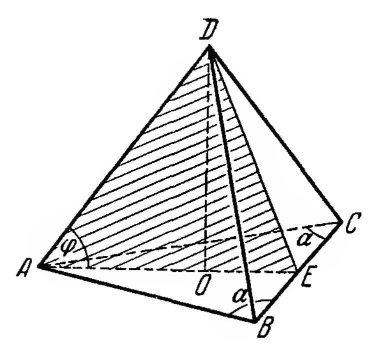
получаем

$$AC = \frac{m}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{m \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad BC = \frac{m \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Затем находим $S_{осн} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$. Высоту H находим из треугольника DOC_1, где $OD = \frac{1}{2} BC$ (как средняя линия треугольника).

Отв. $V = \frac{1}{12} \frac{m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^3} \operatorname{tg} \beta = \frac{m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24\sqrt{2} \cos^3(\alpha - 45^\circ)} \operatorname{tg} \beta.$

629. Точка O есть центр окружности, описанной около основания ABC (черт. 107) (см. предварительное замечание к задаче **611** на стр. 337). $OA=R$ есть радиус этой окружности. Объём пирамиды



Черт. 107.

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{BC\cdot AE}{2}\cdot DO=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{AE\cdot DO}{2}\cdot BC=\frac{1}{3}\cdot Q\cdot BC$$

$\left(\text{так как } \frac{AE\cdot DO}{2}=Q\right)$. Сторону BC находим по теореме синусов:

$$BC=2R\sin(180^\circ-2\alpha)=$$
$$=2R\sin 2\alpha.$$

$\triangle ADO \backsim \triangle ABE$ (так как $\angle ADO=\angle ABE=\alpha$); имеем пропорцию:

$$\frac{AO}{AE}=\frac{OD}{BE}\ ^{1)},$$

откуда

$$AO\cdot BE=AE\cdot OD.$$

Подставив сюда

$$AO=R,\quad BE=\frac{BC}{2},\quad AE\cdot OD=2Q,$$

получим

$$\frac{R\cdot BC}{2}=2Q.$$

Исключив R из найденных формул, получим

$$BC=\sqrt{8Q\sin 2\alpha}.$$

Отв. $V=\frac{1}{3}\cdot(2Q)^{\frac{3}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}2\alpha.$

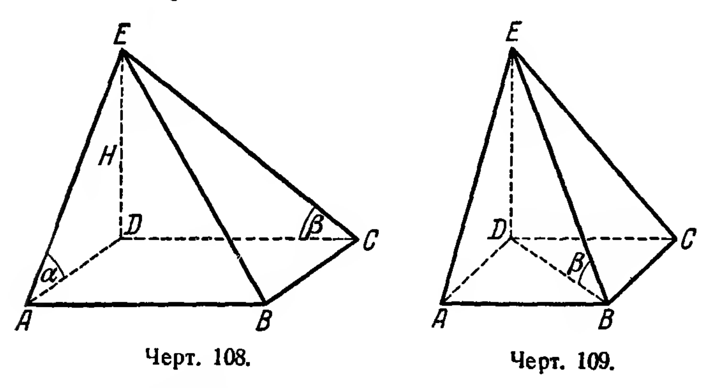
---

[1]) Черт. 107 (где $AO<AE$) явно не соответствует этому соотношению. Но чертёж, точнее изображающий условие задачи $\varphi=90^\circ-\alpha$, был бы очень не нагляден.

630. Если грани ADE и CDE (черт. 108) перпендикулярны к плоскости основания, то ребро DE есть высота пирамиды. Угол DAE есть линейный для двугранного угла $EABC$, так как плоскость DAE перпендикулярна к ребру AB (доказать!). Следовательно, $\angle DAE = \alpha$; аналогично $\angle DCE = \beta$. Из треугольников ADE и CDE, где $DE = H$, находим AD и DC и подставляем в формулу

$$V = \frac{1}{3} AD \cdot DC \cdot H.$$

Отв. $V = \frac{1}{3} H^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.



Черт. 108. Черт. 109.

631. Из треугольника BDE (черт. 109), где $\angle EBD = \beta$ (доказать!), находим

$$DE = l \sin \beta \text{ и } BD = l \cos \beta.$$

Значит,

$$AD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{l \cos \beta}{\sqrt{2}}.$$

Из треугольника ADE находим $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2}$. Угол φ наклона ребра AE к плоскости основания есть $\angle DAE$ (доказать!). Из треугольника ADE имеем $\operatorname{tg} \varphi = \frac{DE}{AD}$.

Отв. $DE = l \sin \beta$; $AE = CE = l \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \beta}{2}}$,

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \beta).$$

632. Наибольшую площадь имеет грань ADB (черт. 110), так как её высота DE больше высоты DC двух других боковых граней, а основания у всех граней одинаковы. Из треугольника ACD имеем

$$AD = \frac{a}{\cos\beta} \text{ и } H = a\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Затем находим

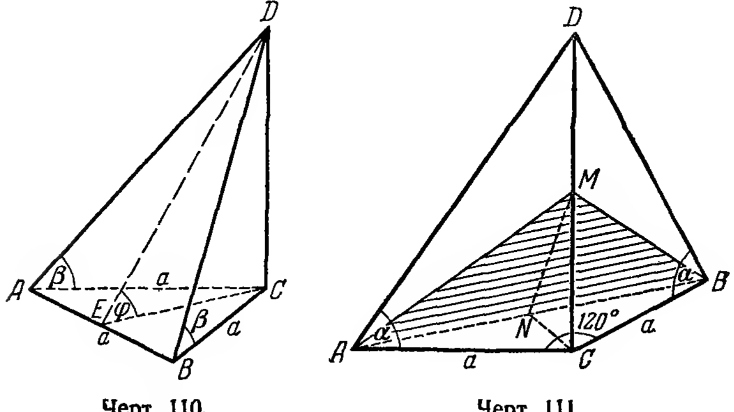
$$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\beta} - \frac{a^2}{4}}.$$

Угол φ наклона грани ADB к плоскости основания есть $\angle CED$ (доказать!). Имеем

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{H}{EC},$$

где $EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Отв. $S = \frac{a^2}{4\cos\beta}\sqrt{4 - \cos^2\beta}$, $\varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sqrt{3}}$.



Черт. 110. Черт. 111.

633. Площадь S сечения равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot NM$ (черт. 111). Из прямоугольного треугольника ACN, где $\angle CAN = 30°$, находим

$$AN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ и } CN = \frac{1}{2}a.$$

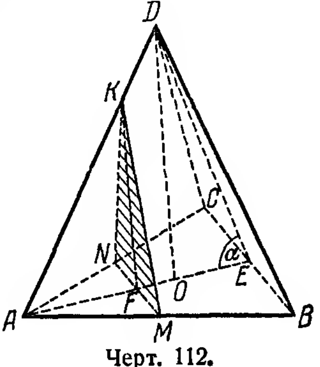
Из треугольника NCM имеем

$$MN=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2},$$

где $H=a\operatorname{tg}\alpha$ (из треугольника ACD).

Отв. $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

634. а) Способ изображения[1]). Чтобы изобразить сечение, перпендикулярное к основанию ABC (черт. 112) и делящее пополам стороны основания AB и AC, проведём среднюю линию MN. Из точки F, где MN пересекает медиану AE, проведём FK параллельно высоте OD. Искомое сечение есть NMK. Действительно, плоскость NMK проходит через прямую FK, перпендикулярную к плоскости ABC (значит, плоскость NMK перпендикулярна к плоскости ABC). Двугранный угол α измеряется углом AED (доказать!).



Черт. 112.

Плоскость AED проходит через прямую KF, так как точки K и F лежат в плоскости AED.

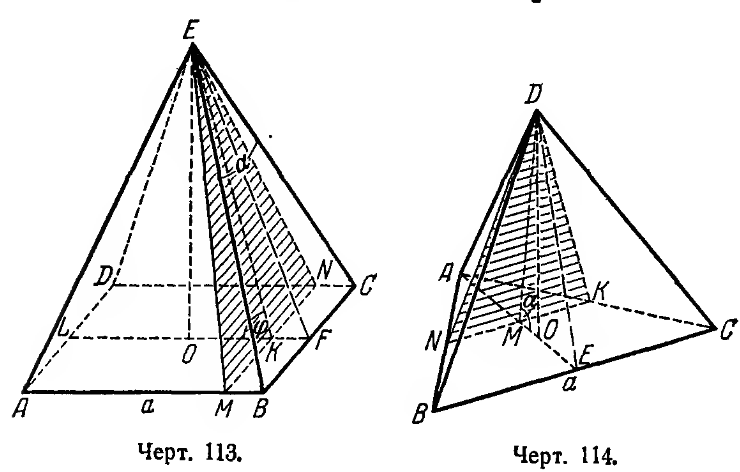
б) Решение. Примем за основание пирамиды $KANM$ треугольник AMN. Его площадь S составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC, т. е. $S=\frac{1}{16}a^2\sqrt{3}$. Высоту KF выразим через OD, пользуясь подобием треугольников AFK и AOD. Так как AF составляет $\frac{3}{4}AO$ (ибо $AF=\frac{1}{2}AE$, а $AO=\frac{2}{3}AE$), то $KF=\frac{3}{4}OD$. Отрезок OD находим из треугольника DOE, где $OE=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\angle DEO=\alpha$.

Отв. $V=\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{128}$.

---

[1]) Об изображении правильной треугольной пирамиды см. задачу 603 на стр. 330.

635. Прямая MN (черт. 113), по которой плоскость основания пересекается с плоскостью сечения, параллельна BC. Чтобы построить угол φ, проведём $OF \parallel AB$ и соединим точку K, где OF встречает MN, с E. Тогда $\angle OKE = \varphi$ (доказать всё это). Площадь сечения $S = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot KE$, где



Черт. 113. Черт. 114.

$MN = a$ и $KE = \frac{H}{\sin\varphi}$. Высота H определяется из треугольника EOF, где $OF = \frac{a}{2}$ и $FE = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (из треугольника EBF). Получаем

$$H = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Отв. $S = \dfrac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi}$.

636 [1]. В сечении получаем треугольник DKN (черт. 114). Как в задаче **634**, докажем, что плоскость AED перпендикулярна к стороне BC. Значит, она перпендикулярна и к сред-

[1]) Об изображении правильной треугольной пирамиды см. черт. 82 на стр. 330.

ней линии KN. Следовательно, $\angle DME$ — линейный угол данного двугранного угла α. Из треугольника OMD, где $OM = \frac{1}{6} AE = \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{3}}{2}$, находим

$$DM = \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha}.$$

Площадь сечения

$$S = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}\, a^2}{48 \cos \alpha}.$$

Площадь основания пирамиды $DAKN$ вчетверо меньше площади основания пирамиды $DABC$, а высота у них общая. Поэтому объём V_1 пирамиды $DAKN$ равен $\frac{1}{4} V$, где V — объём пирамиды $DABC$. Следовательно, объём пирамиды $DKNBC$ $V_2 = \frac{3}{4} V$. Объём V равен

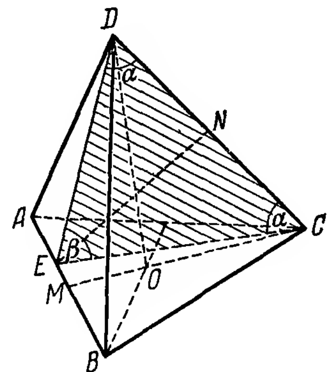
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отв. $S = \frac{\sqrt{3}\, a^2}{48 \cos \alpha}$;

$V_1 = \frac{a^3}{192} \operatorname{tg} \alpha$;

$V_2 = \frac{a^3}{64} \operatorname{tg} \alpha$.



Черт. 115.

637. По условию $BE : EA = 2 : 1$ (черт. 115). Сечение есть $\triangle DEC$. Найдём его площадь S. Треугольник DEC — равнобедренный, так как $EC = ED$ как соответственные стороны равных треугольников AEC и AED ($AC = AD$; сторона AE — общая и $\angle CAE = \angle DAE = 60°$). Проведём высоту его EN; тогда $S = \frac{a \cdot EN}{2}$. Для определения EN найдём сначала EC из $\triangle ACE$ (по теореме косинусов):

$$EC^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \cdot AE \cdot AC \cdot \cos 60° = \frac{7}{9} a^2.$$

Теперь из $\triangle ENC$ находим

$$EN=\sqrt{EC^2-NC^2}=\sqrt{\frac{7}{9}a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{6}\sqrt{19}.$$

Обозначим углы сечения $\angle ECD=\angle EDC$ через α. Тогда $\angle CED=\pi-2\alpha$. Из треугольника CEN имеем

$$\cos\alpha=\frac{CN}{EC}=\frac{3}{2\sqrt{7}}.$$

Отв. $S=\frac{\sqrt{19}a^2}{12}$; $\alpha=\arccos\frac{3}{2\sqrt{7}}$;

$\beta=\pi-2\arccos\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

638[1]. Боковая грань BCC_1B_1 (черт. 116) — равнобочная трапеция с основаниями $BC=a$ и $B_1C_1=b$ $(a>b)$ и углом α при основании a. Отрезок B_1N — её высота. Находим $B_1N=\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Из треугольника B_1NF, где $FN=\frac{a-b}{2}$, находим

$$H=B_1F=\sqrt{NB_1^2-FN^2}=\frac{a-b}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

Объём

$$V=\frac{H}{3}(a^2+b^2+ab)=\frac{a^3-b^3}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

Замечание 1. Если острый угол α меньше чем $45°$, подкоренное выражение отрицательно. Но угол α не может быть меньше $45°$. Действительно, сумма плоских углов $BCC_1=\alpha$ и $DCC_1=\alpha$ трёхгранного угла C всегда больше третьего плоского угла BCD; но $\angle BCD=90°$, поэтому $2\alpha>90°$, т. е. $\alpha>45°$.

Замечание 2. Выражение $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$ можно преобразовать к виду

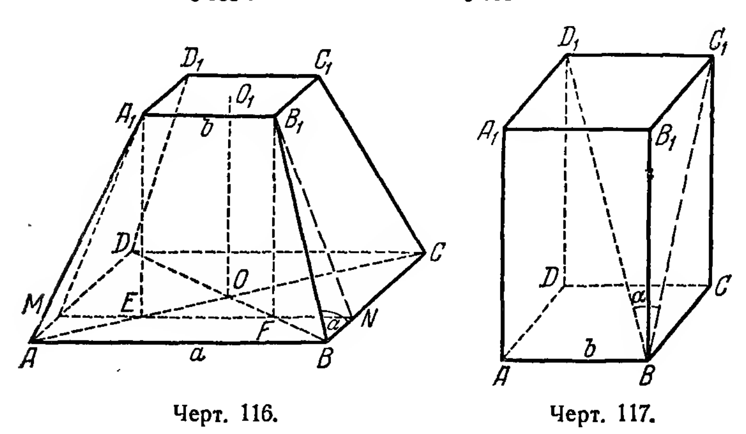
$$\sqrt{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

---

[1]) Об изображении усечённой пирамиды см. задачу 625. См. также задачу 626.

Так как 2α больше чем 90° (но меньше чем 180°, ибо α — острый угол), то $\cos 2\alpha$ всегда отрицателен. Значит, подкоренное выражение $(-\cos 2\alpha)$ всегда положительно.

$$Отв. \quad V=\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha}=\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{\cos(180^\circ-2\alpha)}.$$



Черт. 116. Черт. 117.

639. Проекция диагонали BD_1 (черт. 117) на боковую грань BCC_1B_1 есть BC_1. Поэтому $\angle C_1BD_1=\alpha$. Из треугольника BC_1D_1, где $D_1C_1=b$, находим $BC_1=b\operatorname{ctg}\alpha$. Из треугольника B_1C_1B имеем

$$H=\sqrt{BC_1^2-B_1C_1^2}=\sqrt{b^2\operatorname{ctg}^2\alpha-b^2}=\frac{b\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Объём

$$V=b^2H=b^3\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

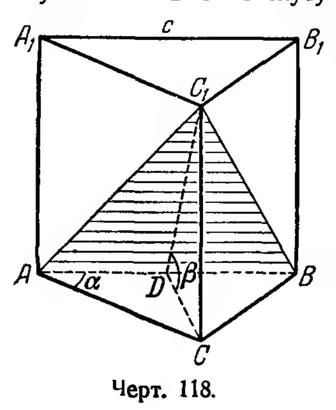
Замечание. Подкоренное выражение $\cos 2\alpha$ здесь (ср. замечание 2 к задаче **638**) всегда положительно, ибо $\alpha<45°$. Действительно,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{D_1C_1}{BC_1}=\frac{B_1C_1}{BC_1}.$$

Но B_1C_1 есть катет, а BC_1 — гипотенуза треугольника BB_1C_1. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha<1$, т. е. $\alpha<45°$.

$$Отв. \quad V=b^3\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

640. Если CD (черт. 118) есть высота треугольника ABC, опущенная на гипотенузу $AB=c$ (на изображении можно провести CD произвольно внутри угла ACB), то $\angle CDC_1=\beta$ (доказать!). Имеем



Черт. 118.

$$CD=AB\cdot\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}c\sin2\alpha$$

и

$$H=CC_1=CD\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Эти выражения подставляем в формулу

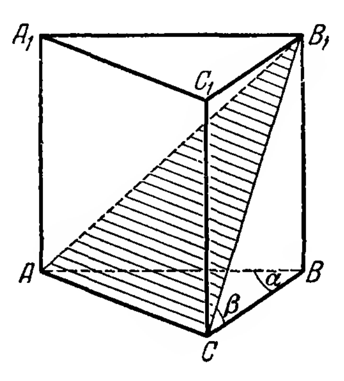
$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}c\cdot CD\cdot H.$$

Отв. $V=\frac{1}{24}c^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta.$

641. Одна из частей призмы есть треугольная пирамида B_1ABC (черт. 119). Её объём $V_1=\frac{1}{3}V$, где V — объём призмы. Значит, объём V_2 другой части (четырёхугольной пирамиды $B_1A_1C_1CA$) равен $\frac{2}{3}V$. Найдём V.

По условию $BC+AB=m$, а из треугольника ABC находим $BC=AB\cdot\cos\alpha$. Следовательно,

$$BC=\frac{m\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$



Черт. 119.

Площадь основания призмы S равна

$$S=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot BC^2\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Высоту $H=BB_1$ определяем из треугольника BCB_1, где $\angle BCB_1=\beta$ (доказать!). Получаем $H=BC\cdot\operatorname{tg}\beta$.

Отв. $V_1=\dfrac{m^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{48\cos^6\frac{\alpha}{2}}$; $V_2=\dfrac{m^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

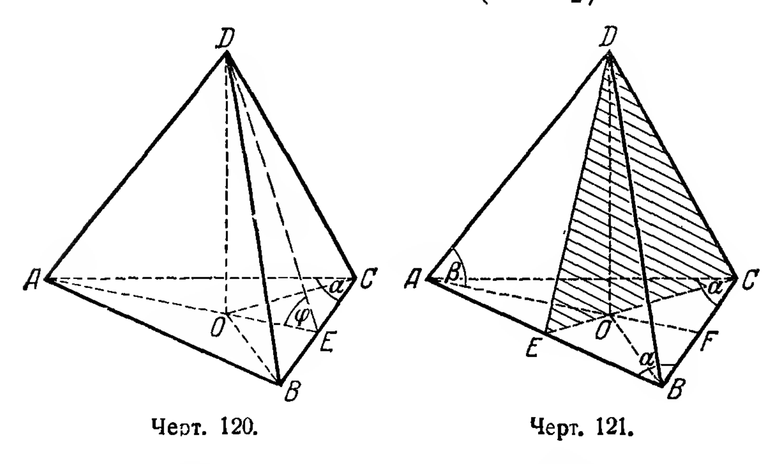
642. Согласно предварительному замечанию к задаче **617**, $S_{осн} = S\cos\varphi = S\sin\alpha$. С другой стороны, $S_{осн} = \frac{a^2 \operatorname{tg}\alpha}{4}$. Приравнивая эти два выражения, получим $a = 2\sqrt{S\cos\alpha}$. Точка O (центр окружности, вписанной в треугольник ABC; черт. 120) лежит на пересечении биссектрис углов треугольника, следовательно,

$$\angle OCE = \frac{\alpha}{2} \text{ и } OE = EC\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

из $\triangle DOE$ находим $H = OE\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

Отв. $V = \frac{1}{3}(S\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

$$S_п = S(1+\cos\varphi) = 2S\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$



Черт. 120. Черт. 121.

643. На черт. 121 $OA = OC = R$ — радиусы окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC = a$). В силу условия $\alpha > 45^\circ$ центр O лежит внутри треугольника ABC (при $\alpha < 45^\circ$ угол $A = 180^\circ - 2\alpha$ был бы тупым, центр описанной окружности лежал бы вне треугольника ABC, и тогда плоскость, проведённая через высоту пирамиды и вершину C, не дала бы никакого сечения пирамиды). Высота пирамиды проходит через центр O (см. на стр. 337 предварительное замечание к задаче **611**).

Из треугольника AOD имеем $H = R\,\mathrm{tg}\,\beta$. Так как по теореме синусов $AC = a = 2R\sin\alpha$, то $H = \frac{a}{2\sin\alpha}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

Найдём теперь основание CE сечения из треугольника ACE. В нём $\angle CAE = 180° - 2\alpha$, а $\angle ACE$, лежащий в основании равнобедренного треугольника AOC ($AO = OC = R$), равен $\angle CAO = \frac{1}{2}\angle CAE = 90° - \alpha$. Значит, $\angle AEC = 3\alpha - 90°$.

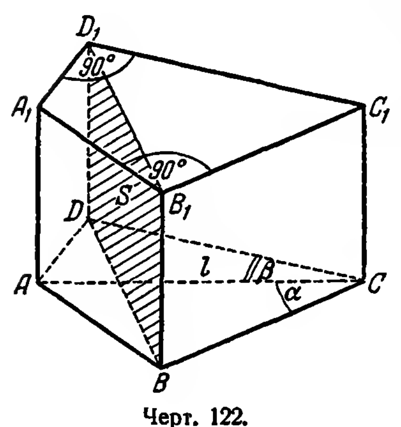
По теореме синусов $\frac{CE}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{a}{\sin(3\alpha - 90°)}$, откуда

$$CE = \frac{a\sin(180° - 2\alpha)}{\sin(3\alpha - 90°)} = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin(3\alpha - 90°)}.$$

Замечание. В знаменателе можно написать $(-\cos 3\alpha)$; но угол 3α заключён между 135° и 270°, так как $45° < \alpha < 90°$; таким образом, $(-\cos 3\alpha)$ есть положительное число. Поэтому при вычислениях с таблицами удобнее иметь дело с углом $3\alpha - 90°$, заключённым между 45° и 180°.

Отв. $S = \frac{a^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\sin(3\alpha - 90°)}$.

644. 1) Найдём площадь Q основания призмы (черт. 122).



Черт. 122.

Имеем: $Q = S_1 + S_2$, где S_1 — площадь прямоугольного треугольника ABC, а S_2 — площадь прямоугольного треугольника ADC,

$$S_1 = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{l\sin\alpha\cdot l\cos\alpha}{2} = \frac{l^2\sin 2\alpha}{4} \text{ и } S_2 = \frac{l^2\sin 2\beta}{4}.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{l^2}{4}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \frac{l^2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{2}.$$

2) Найдём высоту H призмы из условия $S = BD\cdot H$. Так как в четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов при вершинах B и D равна 180°, то около него можно описать окружность, диаметром которой будет диагональ AC, потому что на неё опираются прямые вписанные углы. Из треугольника BCD,

вписанного в эту окружность, находим (по теореме синусов)

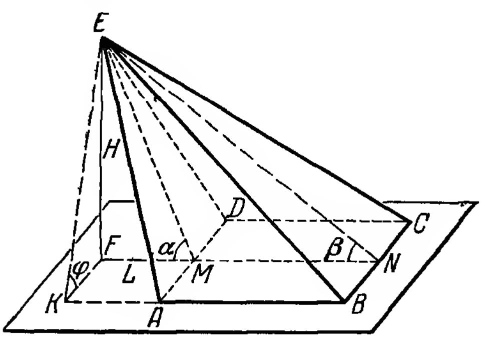
$$BD = AC \cdot \sin \angle DCB = l \sin(\alpha + \beta).$$

Следовательно,

$$H = \frac{S}{BD} = \frac{S}{l \sin(\alpha + \beta)}.$$

Отв. $V = \frac{1}{2} S \cdot l \cos(\alpha - \beta)$.

645. Грани ADE и BCE (черт. 123) — равнобедренные треугольники. Плоскость EMN (M и N — середины рёбер



Черт. 123.

AD и BC) перпендикулярна к BC и AD и проходит через высоту EF пирамиды (доказать!). По условию внешний угол $\alpha = \angle EML$ треугольника EMN — острый. Поэтому высота EF пересекает продолжение MN.

Чтобы определить V, найдём сторону AB квадрата $ABCD$. Имеем

$$AB = MN = NF - MF = H(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha).$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} AB^2 \cdot H = \frac{1}{3} H^3 (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)^2.$$

Построим линейный угол φ двугранного угла, под которым грань ABE наклонена к основанию. Для этого пересечём двугранный угол плоскостью EFK, перпендикулярной к ребру AB. Чтобы изобразить её, надо провести $FK \parallel AD$ до пересечения с продолжением ребра AB (доказать!). Из треугольника EFK

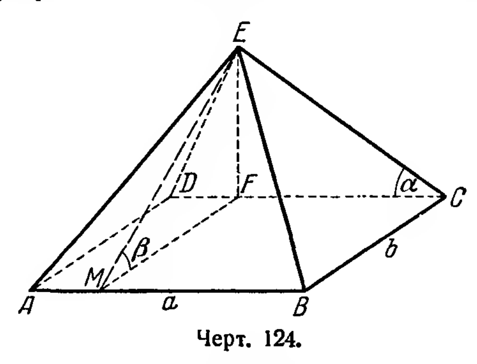
находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{H}{FK}=\frac{2H}{AB}=\frac{2}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Отв. $V=\frac{1}{3}H^3(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\frac{1}{3}H^3\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$,

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

646. Высота EF пирамиды (черт. 124) лежит в грани CED, перпендикулярной к плоскости основания. Плоскость, прове-



Черт. 124.

дённая через EF перпендикулярно к ребру AB, пересекает основание пирамиды по прямой $MF \parallel BC$, а боковую грань AEB — по прямой ME, перпендикулярной к AB ($\angle EMF=\beta$). Прямые AD и BC перпендикулярны к плоскости DEC, так что $\angle BCE=90^\circ$ и $\angle ADE=90^\circ$ (всё это надо доказать).

Найдём высоту $H=EF$. По условию $EF+EM=m$; кроме того, $EM=\frac{EF}{\sin\beta}$. Поэтому $EF\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)=m$, откуда

$$H=EF=m:\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)=m:\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Далее из прямоугольного треугольника DEC находим

$$a=DC=\frac{EC}{\cos\alpha}=\frac{H}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Наконец, находим

$$b=BC=MF=H\operatorname{ctg}\beta=H\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}Hab=\frac{1}{3}H^3\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{H^3}{3\cos^2\alpha}.$$

Сумма S_1+S_2 площадей боковых граней BEC и AED равна

$$\frac{1}{2}BC\cdot EC+\frac{1}{2}AD\cdot ED=\frac{1}{2}b(EC+ED)=\frac{1}{2}b\left(\frac{H}{\sin\alpha}+\frac{H}{\cos\alpha}\right).$$

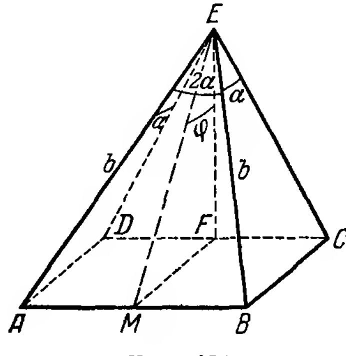
Отв. $V=\dfrac{m^3\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$;

$$S_1+S_2=\frac{m^2(\sin\alpha+\cos\alpha)}{8\cos^4\frac{\alpha}{2}}=\frac{m^2\cos(45^\circ-\alpha)}{4\sqrt{2}\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

647. а) Способ изображения. Высоту EF (черт. 125) проводим в середину F стороны DC. Соединяем вершину E с серединой M стороны AB. Тогда $\varphi=\angle FEM$ есть изображение угла между гранями ABE и DCE (доказать!).

б) Решение. Треугольник BCE — прямоугольный, и в нём $\angle BEC=\alpha$ (доказать!). Значит, $BC=b\sin\alpha$. Из треугольника ABE имеем $AB=2b\sin\alpha$ и $ME=b\cos\alpha$. Из треугольника MFE, где $MF=BC=b\sin\alpha$, находим

$$FE=\sqrt{ME^2-MF^2}=b\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=b\sqrt{\cos 2\alpha}.$$



Черт. 125.

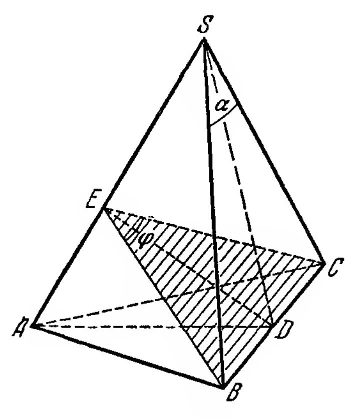
Замечание. Подкоренное выражение $\cos 2\alpha$ здесь всегда положительно, так как $2\alpha<90^\circ$. Действительно, сумма двух плоских углов трёхгранного угла при вершине B ($\angle ABE=\frac{180^\circ-2\alpha}{2}$ и $\angle CBE=90^\circ-\alpha$) больше третьего ($\angle ABC=90^\circ$), т. е. $\frac{180^\circ-2\alpha}{2}+(90^\circ-\alpha)>90^\circ$, так что $2\alpha<90^\circ$.

Угол φ лучше всего найти по его синусу.

Отв. $V=\frac{2}{3}b^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$; $\varphi=\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$.

648. Плоскость BCE (черт. 126) проведена через сторону BC перпендикулярно к ребру AS. Двугранные углы между боковыми гранями (все они равны) измеряются углом $BEC = \varphi$. Треугольник BEC — равнобедренный.

Чтобы определить площадь S сечения и угол φ, достаточно найти DE (D — середина BC). Для этого последова-



Черт. 126.

тельно находим BS $\left(\text{из треугольника } BSD, \text{ где } BD = \frac{a}{2} \text{ и } \angle BSD = \frac{\alpha}{2}\right)$, затем BE (из треугольника BSE, где $\angle BSE = \alpha$) и, наконец, $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2}$. Получаем

$$DE = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}.$$

Теперь находим

$$S = \frac{a}{2}\cdot DE = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \quad \text{и} \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{BD}{EB} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Замечание 1. Сумма плоских углов при вершине S всегда меньше 360°. Поэтому $0 < \alpha < 120°$. При этом условии $2\cos\frac{\alpha}{2} > 1$, т. е. $\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} < 1$, так что уравнение $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ всегда имеет решение.

Замечание 2. Если $\alpha > 90°$, т. е. угол ASB при вершине боковой грани тупой, то высота BE треугольника ASB пересечёт продолжение основания, и плоскость BEC не даст никакого сечения пирамиды. Между тем формула

$$S = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$$

и при тупом угле α (меньшем 120°, см. замечание 1) даст определённое значение S.

Отв. $\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\sec\frac{\alpha}{2}\right)$;

$$S = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2}\sqrt{\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

649. Все восемь граней октаэдра — равносторонние треугольники, так что $NE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (черт. 127). Четырёхугольник $ABCD$ — квадрат. Его плоскость разбивает октаэдр на две равные правильные пирамиды, так что $V = 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot OE$, где

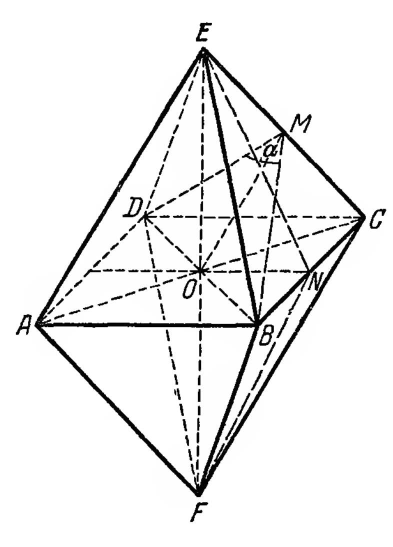
$$OE = \sqrt{EN^2 - ON^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Все двугранные углы октаэдра равны. Угол $\alpha = \angle BMD$ (M — середина CE) измеряет двугранный угол при ребре CE (доказать!). Из треугольника OMB находим

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{BM} =$$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

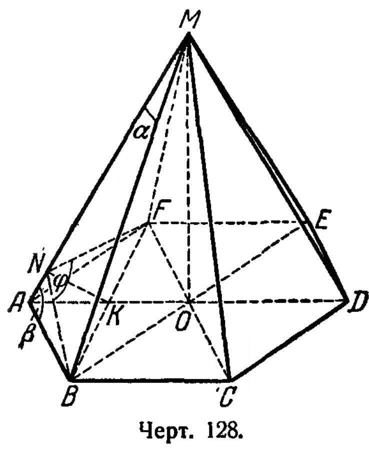
Отв. $V = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{3}$;

$\alpha = 2 \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.



Черт. 127.

650 [1]**).** Равнобедренные треугольники BMA и FMA (черт. 128) равны. Поэтому их высоты, опущенные из вершин B и F, пройдут через одну и ту же точку N их общей стороны и будут равны: $BN = FN$. Угол BNF равен φ (доказать!). Угол $\beta = \angle BAM$ выражается через искомый угол $\alpha = \angle BMA$ формулой



Черт. 128.

$$\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Найдём сначала тригонометрическую функцию угла β. Из прямоугольного треугольника ABN имеем $\sin\beta = \frac{BN}{a}$ (a — сторона основания).

Из равнобедренного треугольника BNF находим $BN = \frac{BK}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Но $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как высота равностороннего треугольника ABO). Следовательно,

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

т. е.

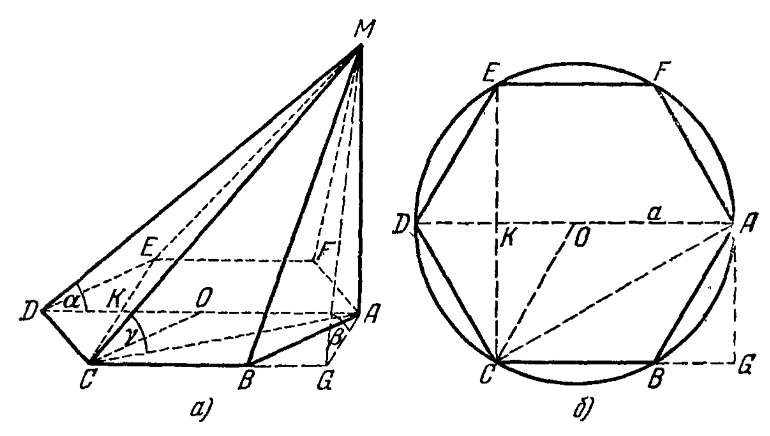
$$\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Замечание. Двугранный угол при ребре правильной шестиугольной пирамиды всегда больше, чем $\angle FAB$ (сравнить треугольники BNF и BAF), т. е. больше 120°. Поэтому величина $\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$ всегда меньше единицы.

Отв. $\alpha = 2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

[1]) Об изображении правильного шестиугольника см. на стр. 328 замечание к задаче **598**.

651. Грани AMF и AMB (черт. 129, *а*), проходящие через ребро AM (перпендикулярное к плоскости $ABCDEF$), образуют с плоскостью основания прямые углы. Найдём общую величину β углов, образуемых гранями EMF и CMB с плоскостью основания. Опустим из A перпендикуляр AG на пря-



Черт. 129.

мую CB (изображение этой прямой должно быть параллельно CE, черт. 129, *б*). Тогда $\beta = \angle AGM$ (доказать!). Имеем $\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{AG}$, где $AG = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (черт. 129, *б*). Но из треугольника AMD имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{2a}$; следовательно,

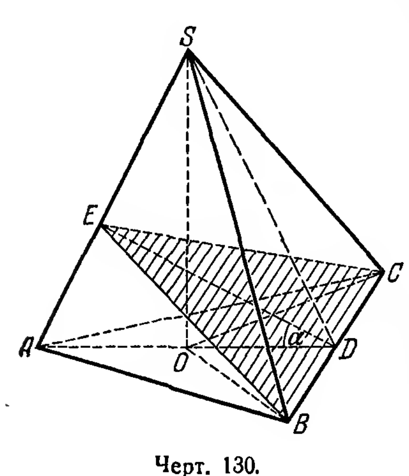
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2H}{a\sqrt{3}} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Так как $AC \perp DC$ (доказать!), то $\gamma = \angle ACM$ есть линейный угол для двугранного угла, под которым грань DCM (и DEM) наклонена к плоскости основания. Из треугольника ACM имеем $\operatorname{tg}\gamma = \frac{H}{AC}$, где $AC = a\sqrt{3}$ (черт. 129, *б*).

Отв. $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}$; $\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}$.

652. Через прямую линию можно провести плоскость, перпендикулярную к другой прямой, только в том случае,

если эти прямые перпендикулярны. Докажем, что $BC \perp AS$ (черт. 130). Проведём плоскость ASO через ребро AS и высоту SO. Так как A и O принадлежат плоскости ASO и одновременно плоскости основания ABC, то эти плоскости пересекутся по прямой AO, т. е. по высоте AD равнобедренного треугольника ABC. Треугольники OCD и OBD равны (доказать!), поэтому $OB = OC$; следовательно, наклонные SC и SB тоже равны, а значит, прямая SD, являющаяся медианой равнобедренного треугольника BSC, служит и его высотой. Так как прямые AD и SD, по доказанному, перпендикулярны к ребру BC, то ребро BC перпендикулярно к плоскости ADS, а значит, и к прямой AS, лежащей в этой плоскости, что и требовалось доказать.



Черт. 130.

Чтобы провести через BC плоскость, перпендикулярную к AS, достаточно опустить перпендикуляр DE на прямую AS. Плоскость BEC перпендикулярна к ребру AS, так как две прямые, лежащие на ней (DE и BC), перпендикулярны к AS. Плоскость ADS, перпендикулярная к ребру BC, в пересечении с двугранным углом α даёт угол ADE (линейный угол этого двугранного угла).

Треугольник ASD — равнобедренный (так как высота SO проходит через середину основания AD). Следовательно,

$$\angle ASD = 2\angle ASO = 2\alpha$$

($\angle ASO = \angle ADE = \alpha$ как углы с перпендикулярными сторонами). Отношение объёма V_1 пирамиды $SBCE$ к объёму V пирамиды $ABCE$ (эти пирамиды имеют общее основание BCE) равно отношению высот, т. е. $V_1 : V = SE : AE$. Из треугольника DSE имеем

$$SE = DE \cdot \operatorname{ctg} \angle ESD = DE \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha;$$

из треугольника AED находим

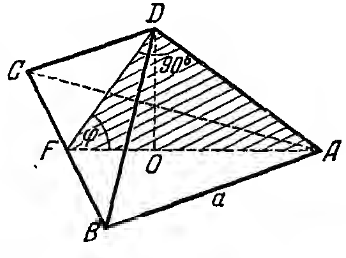
$$AE = DE \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$V_1 : V = \operatorname{ctg} 2\alpha : \operatorname{tg} \alpha.$$

Отв. $V_1 = V \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha.$

653 [1]. Чтобы провести сечение, делящее пополам двугранный угол при ребре AD (черт. 131), нужно иметь линейный угол этого двугранного угла. Таковым является угол BDC, так как плоскость BDC перпендикулярна к ребру AD. Действительно, во всякой правильной пирамиде боковое ребро AD перпендикулярно к противоположной стороне BC основания (доказывается так же, как в предыдущей задаче); кроме того, в данном случае ребро AD перпендикулярно также и к прямой FD. Действительно, по условию треугольник AFD — прямоугольный, а так как его углы при вершинах A и F непременно острые, то прямой угол есть $\angle ADF$.



Черт. 131.

Так как $OF = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} R$, то

$$OD = \sqrt{OF \cdot OA} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$\left(\text{где } R = \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. Угол $\varphi = \angle AFD$ измеряет угол наклона грани BCD к плоскости основания. Имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OD}{OF} = \frac{R}{\sqrt{2}} : \frac{R}{2} = \sqrt{2}.$$

Замечание. Боковое ребро AD образует с ребром BD (и с ребром CD) прямой угол; так как наша пирамида — правильная, то и рёбра BD и DC образуют прямой угол.

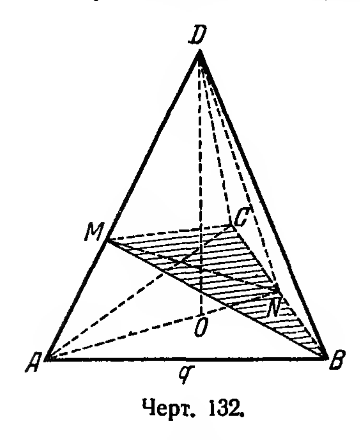
Отв. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$; $\varphi = \operatorname{arc tg} \sqrt{2}.$

---

[1]) Об изображении правильной треугольной пирамиды см. задачу **603** на стр. 330.

654 [1]). Для вычисления полной поверхности неизвестна только апофема ND. Для определения её найдём сначала отрезки AM и MD (черт. 132), на которые делится ребро AD перпендикулярной к нему прямой NM (N — середина BC). Затем из треугольника ANM, где $AN = \frac{q\sqrt{3}}{2}$, найдём MN и, наконец, из треугольника NMD найдём ND.

В условии не сказано, какое из двух отношений — $AM:MD$ или $MD:AM$ — равно $m:n$, поэтому можно положить $MD = mx$, $MA = nx$, так что $AD = (m+n)x$. Из подобия треугольников AMN и ADO имеем



Черт. 132.

$$\frac{AM}{AO} = \frac{AN}{AD},$$

где

$$AN = \frac{q\sqrt{3}}{2}$$

и

$$AO = \frac{2}{3}AN = \frac{q\sqrt{3}}{3}.$$

Получаем уравнение

$$nx \cdot (m+n)x = \frac{q\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{q\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{q}{\sqrt{2n(m+n)}},$$

так что

$$MD = \frac{mq}{\sqrt{2n(m+n)}}$$

и

$$AM = \frac{nq}{\sqrt{2n(m+n)}}.$$

---

[1]) Об изображении правильной треугольной пирамиды см. задачу **603** на стр. 330.

Далее,

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = \frac{q^2(n+3m)}{4(m+n)}$$

и

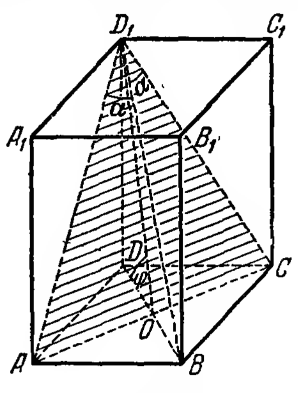
$$ND^2 = MD^2 + MN^2 = \frac{q^2(n+2m)}{4n}.$$

Теперь найдём

$$S_п = \frac{q^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3q \cdot ND}{2}.$$

Отв. $S_п = \frac{q^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{3(n+2m)}{n}}\right].$

655. Имеем (черт. 133) $\angle BD_1A = \alpha$ и $\angle BD_1C = \alpha$ (доказать!). Треугольники BD_1A и BD_1C равны (доказать!).



Черт. 133.

Следовательно, основание $ABCD$ — квадрат со стороной $a = d \sin \alpha$. Далее находим

$$AD_1 = d \cos \alpha$$

и

$$H = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \sqrt{d^2 \cos^2 \alpha - d^2 \sin^2 \alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Плоскость ACD_1 образует с плоскостью основания угол $\varphi = \angle DOD_1$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{DD_1}{OD} = H : \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Отв. $V = d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}\right)$.

656. Угол $EOC = \alpha$ (черт. 134). Для построения угла β отрезка OE с боковой гранью BB_1C_1C проведём $OF \perp BC$. Проекцией OE на эту грань будет FE, так что $\angle OEF = \beta$. Если обозначим $AB = a$; $BC = b$ и $CC_1 = c$, то $V = abc$ и $S_{бок} = 2(a + c)b$. Из $\triangle OEF$ имеем

$$\frac{a}{2} = OF = m \sin\beta = m \sin 2\alpha;$$

$$FE = m\cos\beta = m\cos 2\alpha;$$

из $\triangle OEC$ имеем

$$\frac{c}{2} = EC = m \sin\alpha;$$

из $\triangle FEC$ имеем

$$\frac{b}{2} = FC = \sqrt{FE^2 - EC^2} = m\sqrt{\cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Черт. 134.

Приведём подкоренное выражение к виду, удобному для логарифмирования:

$$\cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1+\cos 4\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{2} = \cos 3\alpha \cos\alpha.$$

Следовательно,

$$b = 2m\sqrt{\cos 3\alpha \cos\alpha}.$$

Замечание. Угол $\beta = \angle OEF$ меньше, чем $\angle OEC = 90° - \alpha$ (сравнить их синусы!). А так как по условию $\beta = 2\alpha$, то $2\alpha < 90° - \alpha$. Следовательно, должно быть $\alpha < 30°$.

Отв. $V = 8m^3 \sin 2\alpha \sin\alpha \sqrt{\cos 3\alpha \cos\alpha}$;

$$S_{бок} = 16m^2 \sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos 3\alpha\cos\alpha}.$$

657. а) Способ изображения. Полуокружность изображается полуэллипсом (AB — какой-либо диаметр эллипса; черт. 135[1])), DC проводится параллельно AB. Прямые,

[1]) О вычерчивании эллипса см. стр. 339 (задача **613**).

перпендикулярные к AB, изображаются прямыми, параллельными касательным AM и BL.

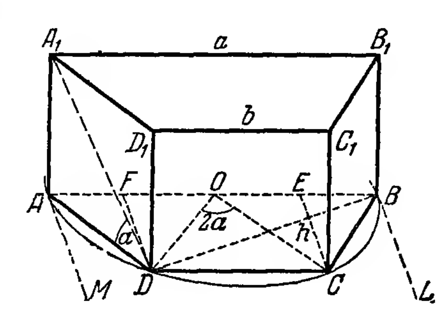
б) Решение. Обозначим $AB=a$; $DC=b$; $DF=CE=h$; тогда $V=\frac{a+b}{2}hH$.

По условию $a=2R$; сторону b находим по теореме синусов из треугольника BCD, в котором $\angle DBC$ измеряется половиной дуги $\breve{DC}=2\alpha$; имеем $b=2R\sin\alpha$. Из треугольника ODF, где $OD=R$, а $\angle AOD$ измеряется дугой $\breve{AD}=\frac{180°-2\alpha}{2}=90°-\alpha$, находим

$h=FD=$

$=R\sin(90°-\alpha)=$

$=R\cos\alpha.$



Черт. 135.

Высоту H находим из треугольника A_1AD, где $\angle A_1DA=\alpha$ (доказать!) и AD можно определить из прямоугольного треугольника ADB, где $\angle ABD$ — опирающийся на дугу $\breve{AD}$, равен $\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. Получим

$$H=2R\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно,

$$V=2R^3(1+\sin\alpha)\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha,$$

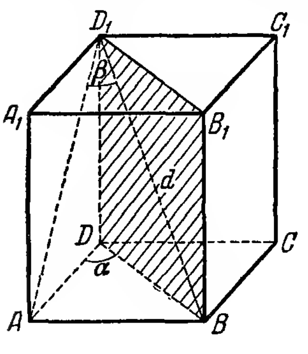
где можно произвести ряд упрощений:

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$$

и т. д.

Отв. $V=R^3\sin 2\alpha\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

658. Проекцией диагонали D_1B на боковую грань AA_1D_1D (черт. 136) будет AD_1; поэтому $\angle AD_1B = \beta$. Угол α между плоскостью сечения DBB_1D_1 и плоскостью грани ADD_1A_1 измеряется углом ADB (доказать!). Из треугольника AD_1B находим AB и AD_1; из треугольника ABD находим AD и из треугольника AD_1D находим $DD_1 = H$;



Черт. 136.

$$H = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \\ = \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha - d^2 \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \\ = \frac{d}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha} = \\ = \frac{d}{\sin \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Замечание. Угол β всегда меньше угла α (сравнить их тангенсы!). Так как по условию $\beta = 90° - \alpha$, то $90 - \alpha < \alpha$, следовательно, $\alpha > 45°$. Из неравенства

$$45° < \alpha < 90°$$

следует, что угол 2α принадлежит второй четверти, так что $\cos 2\alpha < 0$, а $-\cos 2\alpha > 0$. Для вычислений удобнее заменить $-\cos 2\alpha$ выражением $\cos (180° - 2\alpha)$, так как угол $180° - 2\alpha$ принадлежит первой четверти.

Отв. $V = d^3 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha \sqrt{\cos (180° - 2\alpha)}$.

659. Проведённые линии суть A_1N и B_1M (черт. 137). Четырёхугольник A_1B_1NM — равнобочная трапеция (доказать!). Из равнобедренного треугольника MKN, где $\angle MKN = \alpha$ и $MN = \frac{b}{2}$, имеем

$$KD = \frac{b}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника A_1KB_1 находим

$$KD_1 = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$DD_1 = \frac{3b}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

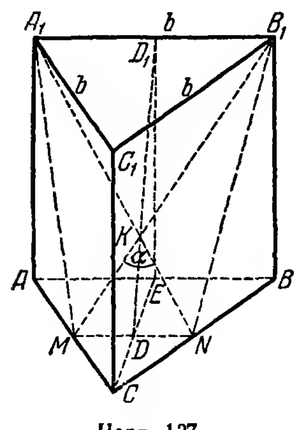
Из треугольника DED_1, где $DE=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{4}b\sqrt{3}$, находим

$$H=ED_1=\frac{3b}{4}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{3b}{4}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2 60^\circ}=$$

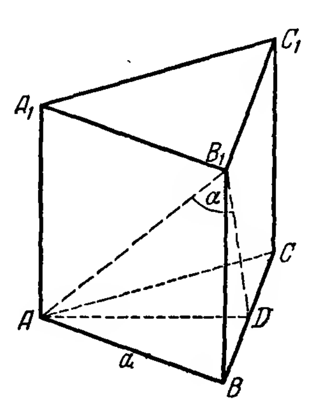
$$=\frac{3b}{4}\sqrt{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}60^\circ\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}60^\circ\right)}=$$

$$=\frac{3b\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin 60^\circ}.$$

Отв. $V=\dfrac{3b^3}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.



Черт. 137.



Черт. 138.

660. Для построения угла, образованного диагональю AB_1 с боковой гранью BB_1C_1C, надо найти проекцию AB_1 на эту грань (черт. 138). Точка A проектируется в точку D, середину BC (доказать!). Проекция будет B_1D, так что $\angle AB_1D=\alpha$. Из $\triangle B_1BD$ находим

$$H=BB_1=\sqrt{B_1D^2-BD^2};$$

B_1D найдём из прямоугольного треугольника AB_1D. Пре-

образование выражения, полученного для H, такое же, как в предыдущей задаче.

Отв. $S_{бок}=\frac{3a^2\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}}{\sin\alpha}$.

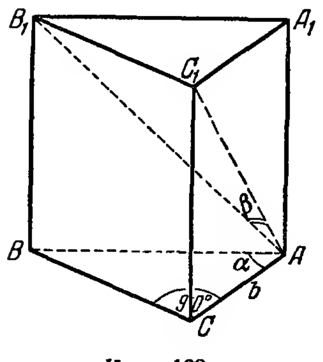
661. Проекцией диагонали AB_1 на грань AA_1C_1C будет AC_1 (черт. 139), так что $\angle B_1AC_1=\beta$. Высота призмы

$$CC_1=\sqrt{AC_1^2-AC^2},$$

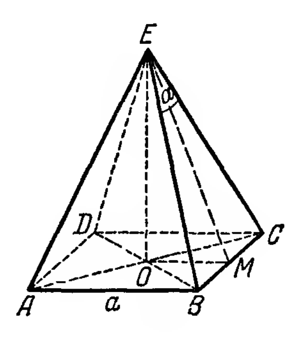
где AC_1 определяется из $\triangle B_1AC_1$; имеем

$$CC_1=\sqrt{b^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta-b^2}=b\operatorname{ctg}\beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}=$$
$$=\frac{b}{\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Отв. $V=\frac{b^3\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.



Черт. 139.



Черт. 140.

662. По условию $a^2+2a\cdot ME=S$ (черт. 140). Но из треугольника BME имеем $ME=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; следовательно, $S=a^2\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$; отсюда $a=\sqrt{\frac{S}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}$. Теперь из

треугольника OME находим

$$H=\sqrt{ME^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{S\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)}.$$

Выражение $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1$ можно преобразовать:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}45^\circ=$$

$$=\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 45^\circ\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Отв. $H=\sqrt{\dfrac{S\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}.$

663. Имеем из треугольника AOM (черт. 141), где

$$\angle AOM=\frac{180^\circ}{n},\quad OM=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n};$$

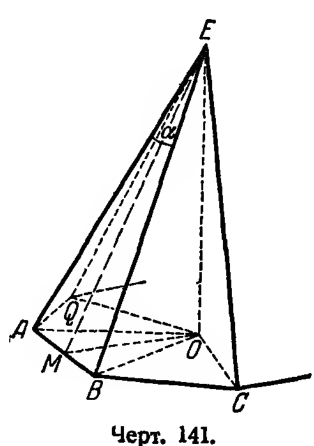
значит,

$$S_{осн}=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Из треугольника EOM находим

$$H=\sqrt{ME^2-OM^2}=$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}.$$



Черт. 141.

Подкоренное выражение преобразуется, как в задаче 659.

Отв. $V=\dfrac{na^3\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{24\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{180^\circ}{n}},$

664. Обозначив (черт. 142) $OD = OA$ через x, получим

$$OD_1 = AO \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = x \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

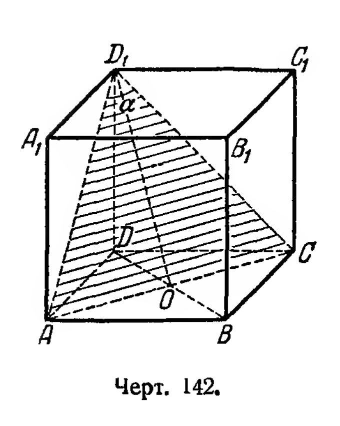
и

$$H = DD_1 = \sqrt{OD_1^2 - OD^2} = x\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Полная поверхность S пирамиды D_1ADC равна

$$S = DO \cdot AO + AD \cdot H + AO \cdot OD_1 =$$
$$= x^2 + x\sqrt{2}x\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} + x \cdot x \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда



Черт. 142.

$$x^2 = \frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Полная поверхность призмы

$$S_п = 4x^2 + 4 \cdot x\sqrt{2} \cdot H =$$
$$= 4x^2\left(1 + \frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Отв.

$$S_п = \frac{4S\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}}.$$

665. Высота DO проходит через центр O (черт. 143, *а*) круга, описанного около треугольника ABC, где $AB = AC = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ и $BC = 2l\sin\frac{\beta}{2}$ [1]). Точка O лежит на перпендикуляре KO к стороне AB, проведённом через середину AB. Поэтому из подобия треугольников AOK и ABL имеем про-

---

[1]) См. на стр. 337 предварительное замечание к задаче **611**.

порцию $AO : \frac{1}{2} AB = AB : AL$, откуда

$$AO = \frac{\frac{1}{2} AB^2}{AL} = \frac{2l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

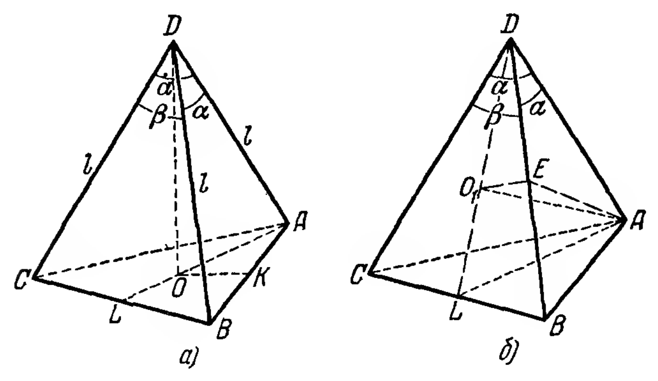
Далее из треугольника AOD находим

$$H = \sqrt{l^2 - AO^2} = l \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}$$

и

$$V = \frac{1}{3 \cdot 2} BC \cdot AL \cdot H = \frac{1}{3} l^3 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Подкоренное выражение можно преобразовать, как указано в задаче **656**.



Черт. 143.

Другой способ. Примем за основание пирамиды грань BDC (черт. 143, *б*); площадь её $S_{осн} = \frac{1}{2} l^2 \sin \beta$. Грань BDC перпендикулярна к плоскости ADL (доказать!), и следовательно, высота пирамиды AO_1 будет лежать в этой плоскости. Проводим O_1E перпендикулярно к BD. Из

подобия треугольников O_1DE и BDL имеем $\frac{O_1D}{ED}=\frac{BD}{DL}$, где из $\triangle ADE$

$$ED=l\cos\alpha,\quad BD=l \text{ и } DL=l\cos\frac{\beta}{2};$$

отсюда

$$O_1D=\frac{l\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Из треугольника ADO_1 находим

$$H=AO_1=\sqrt{AD^2-DO_1^2}=\frac{l}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Отв. $V=\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$.

666. Так как треугольник ABC (черт. 144) есть проекция треугольника DBC, то DA есть перпендикуляр к плоскости основания. Площадь S_1 треугольника ABC равна

$$S_1=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Площадь S_2 треугольника BCD равна

$$S_2=\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\beta.$$

По условию

$$\frac{1}{2}a^2(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)=S,$$

откуда $a=\sqrt{\frac{2S}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}}$.

Черт. 144.

Площадь S_3 грани DAC равна $S_3=\frac{1}{2}bH$, а площадь S_4 грани DAB равна $S_4=\frac{1}{2}cH$. Следовательно,

$$S_4-S_3=\frac{1}{2}H(c-b)=\frac{1}{2}aH(\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha).$$

Высоту H определим из треугольника ACD; получим

$$H=\sqrt{DC^2-AC^2}=\sqrt{a^2\operatorname{ctg}^2\beta-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Следовательно,

$$S_4 - S_3 = \frac{1}{2}a^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha}\,(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2S}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha}\,(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) =$$

$$= \frac{S(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha}{(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)^2}} = S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}}.$$

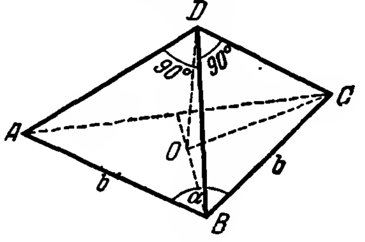
Боковые грани ADC и ADB образуют с основанием прямые углы. Грань BDC образует с основанием угол, измеряемый линейным углом $DCA = \varphi$;

$$\cos\varphi = \frac{AC}{DC} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}.$$

Отв. $S_4 - S_3 = S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}}$; $\varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}\right)$.

667. Все боковые рёбра пирамиды равны как стороны равнобедренных прямоугольных треугольников (черт. 145), поэтому высота DO пирамиды будет проходить через центр O окружности, описанной около основания;

$$S_{осн} = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha.$$



Черт. 145.

Из треугольника DOC находим

$$H = \sqrt{DC^2 - OC^2},$$

где $DC = \frac{b}{\sqrt{2}}$, а $OC = R$ есть радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $\angle BAC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ и, следовательно, по теореме синусов

$$BC = 2R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right),$$

откуда

$$OC = R = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Отв. $V = \frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

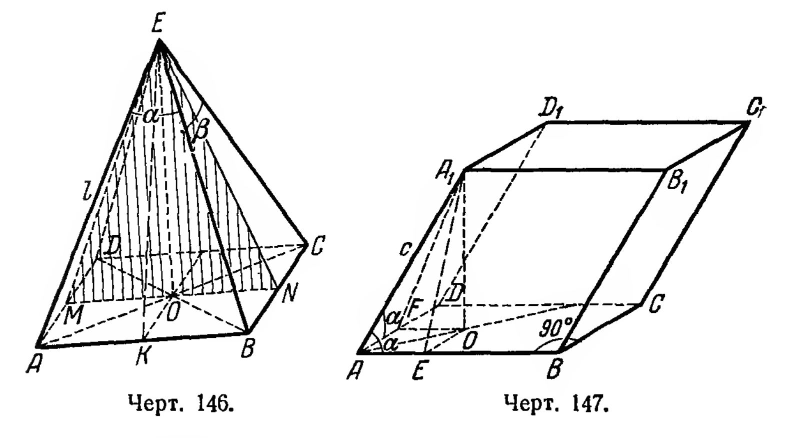
668. Высота пройдёт через центр окружности, описанной около основания[1]) (черт. 146). Биссектрисы углов AED и BEC будут также медианами равнобедренных треугольников AED и BEC. Площадь сечения MEN равна $\frac{MN}{2}\cdot OE$, причём $\frac{MN}{2}=AK=l\sin\frac{\alpha}{2}$. Из треугольника EOK находим

$$OE=\sqrt{EK^2-OK^2},$$

где $EK=l\cos\frac{\alpha}{2}$ и $OK=BN=l\sin\frac{\beta}{2}$, так что

$$OE=l\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Отв. $S_{сеч}=l^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$



Черт. 146. Черт. 147.

669. Проведём через вершину A_1 (черт. 147) плоскости A_1EO перпендикулярно к AB и A_1FO — перпендикулярно к AD. Эти плоскости будут перпендикулярны к плоскости основания (доказать!) и линия их пересечения A_1O будет высотой параллелепипеда. Образовавшиеся прямоугольные треугольники A_1AE и A_1AF равны между собой (по общей гипотенузе $AA_1=c$ и равным углам $\angle A_1AE=\angle A_1AF=\alpha$). Следовательно, $A_1E=A_1F$ и поэтому будут равны треуголь-

[1]) См. на стр. 337 предварительное замечание к задаче 611.

ники A_1OE и A_1OF, а значит, $OE = OF$ и прямая AO — биссектриса угла BAD. Имеем $H = \sqrt{A_1E^2 - OE^2}$. Так как $AEOF$ — квадрат, то $OE = AE$. Находим AE и A_1E из треугольника AA_1E; получаем $H = c\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Замечание. В трёхгранном угле при вершине A два плоских угла равны каждый α и третий угол прямой; следовательно, сумма двух плоских углов 2α должна быть больше третьего (90°), т. е. $2\alpha > 90°$ или $\alpha > 45°$. При этом условии $-\cos 2\alpha > 0$ и, следовательно, H имеет действительное значение. Боковое ребро AA_1 образует с плоскостью основания $\angle A_1AO = \varphi$, так как AO — проекция ребра на основание

$$\cos\varphi = \frac{AO}{AA_1} = \sqrt{2}\cos\alpha.$$

Отв. $V = abc\sqrt{\cos(180° - 2\alpha)}$; $S_{бок} = 2c(a+b)\sin\alpha$;

$$\varphi = \arccos(\sqrt{2}\cos\alpha).$$

670. Построение в этой задаче то же, что в предыдущей. Биссектриса угла BAD будет диагональю ромба AC (черт. 148).

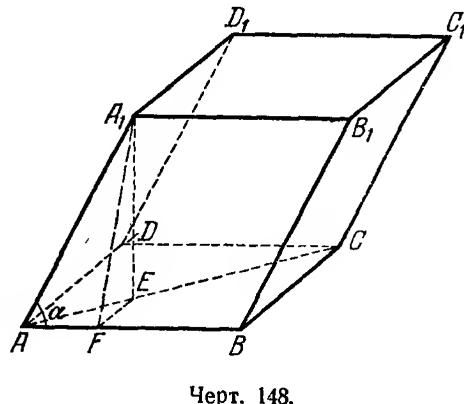
$$S_{осн} = a^2\sin\alpha.$$

Из треугольника AA_1E находим

$$H = \sqrt{AA_1^2 - AE^2},$$

где $AA_1 = a$; для определения AE находим сначала AF из $\triangle AA_1F$, а потом AE из прямоугольного $\triangle AEF$. Получим

$$AE = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$



Черт. 148.

откуда

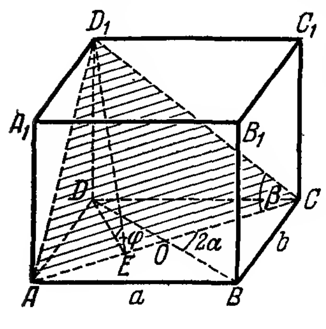
$$H = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

Отв. $V = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

671. Задача решается аналогично предыдущей. Можно использовать тот же чертёж 148, сняв в нём обозначение угла $\alpha = \angle A_1AB$ и введя обозначения $\angle BAD = \alpha$ и $\angle A_1AD = \varphi$.

Отв. $V = 2a^2b \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

672. Основание $ABCD$ — прямоугольник (черт. 149). Для построения линейного угла двугранного угла D_1ACD проводим через ребро DD_1 плоскость, перпендикулярную к AC; в пересечении с гранями двугранного угла получим линейный угол $\angle D_1ED = \varphi$. Имеем



Черт. 149.

$$\cos\varphi = \frac{DE}{D_1E} = \frac{h_1}{h}.$$

Обозначим

$$AB = DC = a,$$
$$BC = AD = b\ (a > b),\ DD_1 = H,$$
$$D_1E = h,\quad DE = h_1.$$

В равнобедренном треугольнике AOB сумма внутренних углов при основании AB равна внешнему углу 2α, следовательно, $\angle BAC = \alpha$. Из $\triangle ABC$ находим

$$a = 2R\cos\alpha;\quad b = 2R\sin\alpha.$$

Из $\triangle DEC$, где $\angle ACD = \alpha$, находим

$$h_1 = a\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha \text{ и } EC = a\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha.$$

Из $\triangle D_1EC$ находим

$$h = EC\cdot\operatorname{tg}\beta = 2R\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Из $\triangle D_1DE$ находим

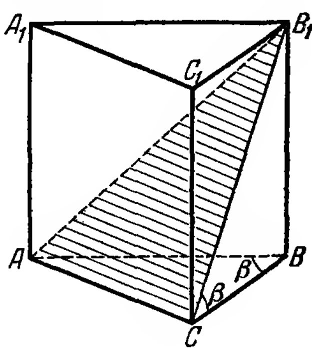
$$H = \sqrt{D_1E^2 - DE^2} = \sqrt{h^2 - h_1^2} =$$
$$= \sqrt{4R^2\cos^4\alpha\operatorname{tg}^2\beta - 4R^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 2R\cos^2\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Выражение $\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha$ преобразуем, как в задаче **659**.

Отв.

$$S_{бок} = 8R^2\cos\alpha\cos(45° - \alpha)\sec\beta\sqrt{2\sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha)};$$
$$S_{сеч} = 2R^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta;\quad \varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right).$$

673. Если катет AC (черт. 150) стягивает дугу, равную 2β, то $\angle ABC$, как вписанный, опирающийся на эту дугу, будет равен β. Плоскость, проходящая через диагональ B_1C перпендикулярно к грани BB_1C_1C, должна пройти через AC, так как AC перпендикулярна к этой грани; линейный угол двугранного угла B_1ACB будет $\angle B_1CB=\beta$. Гипотенуза AB есть диаметр описанной окружности и, следовательно, $AB=2R$. Обозначим $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$. Плоскость ACB_1 отсекает от призмы четырёхугольную пирамиду $B_1AA_1C_1C$. Так как объём пирамиды B_1ABC равен $\frac{1}{3}$ объёма призмы, то объём оставшейся четырёхугольной пирамиды равен $\frac{2}{3}$ объёма призмы. Если через V_1 обозначим объём пирамиды $B_1AA_1C_1C$, а через V — объём призмы, то



Черт. 150.

$$V_1=\frac{2}{3}V=\frac{2}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot H=\frac{abH}{3}.$$

Из $\triangle ABC$ находим a и b, а из $\triangle B_1BC$ находим H. Для боковой поверхности получим следующее выражение:

$$S_{бок}=(2R\cos\beta+2R\sin\beta+2R)\cdot 2R\cos\beta\operatorname{tg}\beta=$$
$$=4R^2\sin\beta(\cos\beta+\sin\beta+1).$$

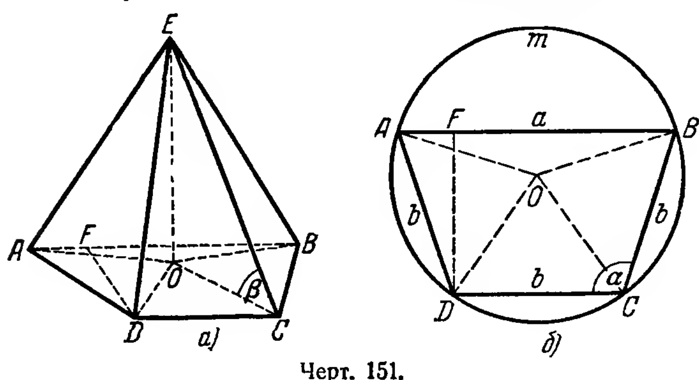
Выражение в скобках можно привести к виду, удобному для логарифмирования: $\cos\beta+\sin\beta+1=(1+\cos\beta)+\sin\beta=$

$$=2\cos^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=2\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$
$$=2\cos\frac{\beta}{2}\left[\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\right]=$$
$$=2\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right).$$

Отв. $S_{бок}=8\sqrt{2}R^2\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)$;

$V_1=\frac{4}{3}R^3\sin\beta\sin 2\beta.$

674. Высота EO (черт. 151, *а*) проходит через центр O окружности, описанной около трапеции $ABCD$[1]). Дуги $\smile{AD}$, $\smile{DC}$ и $\smile{CB}$ (черт. 151, *б*) равны (так как по условию стороны AD, DC и CB равны), причём $\angle B = 180° - \alpha$ измеряется половиной дуги $\smile{ADC}$. Значит, дуги $\smile{AD}$, $\smile{DC}$ и $\smile{CB}$ содержат



Черт. 151.

по $180° - \alpha$; следовательно, дуга $\smile{AmB}$ содержит $360° - 3(180° - \alpha) = 3\alpha - 180°$. Из треугольника AOB, где $AB = a$, находим

$$AO = R = \frac{a}{2\sin\frac{3\alpha - 180°}{2}} = -\frac{a}{2\cos\frac{3\alpha}{2}}$$

(величина $\cos\frac{3\alpha}{2}$ отрицательна, ибо α — тупой угол, так что $135° < \frac{3\alpha}{2} < 270°$). Из треугольника ODC находим

$$DC = b = 2R\sin\frac{180° - \alpha}{2} = -\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

Из треугольника ADF, где $AD = b$ и $\angle A = 180° - \alpha$, находим высоту трапеции

$$DF = h = b\sin\alpha = -\frac{a\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

---

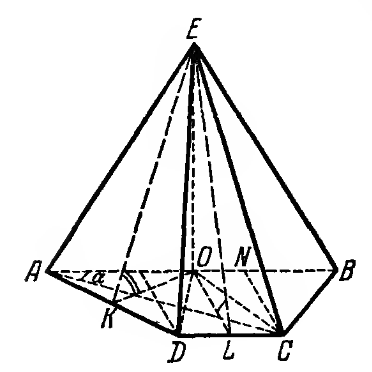
[1]) См. на стр. 337 предварительное замечание к задаче **611**.

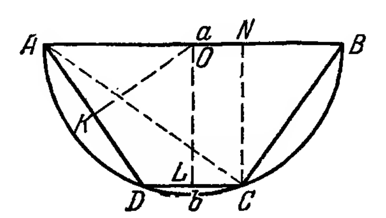
Из треугольника BOE (см. черт. 151, *а*), где $OB = R$ и $\angle OBE = \beta$, находим $H = R \operatorname{tg} \beta$. Площадь основания

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h = -\frac{a^2\left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{2\cos^2\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a^2\sin^3\alpha}{2\cos^2\frac{3\alpha}{2}}.$$

Отв. $V = -\dfrac{a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos^3\frac{3\alpha}{2}} = \dfrac{a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos^3\left(180^\circ - \frac{3\alpha}{2}\right)}$.

675. Высота EO проходит через центр O окружности, описанной около трапеции $ABCD$ [1]) (черт. 152). Угол $ACB = 90^\circ$, как вписанный в эту окружность, должен опираться на диаметр. Иначе говоря, центр O лежит на стороне AB. Трапеция $ABCD$, как вписанная в окружность, — равнобочная, так что $\angle DAB = \angle CBA$.





Черт. 152.

Введём обозначения $AB = a$; $DC = b$; $\angle AEB = \varphi = 2\alpha$. По условию $\frac{1}{2}aH = S$, а из равнобедренного треугольника AEB имеем $a = 2H \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 2H\operatorname{tg}\alpha$.

Из этих двух уравнений находим

$$H = \sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha} \quad \text{и} \quad a = 2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}.$$

---

[1]) См. на стр. 337 предварительное замечание к задаче **611**.

Сторону $b = DC$ найдём из треугольника ADC, вписанного в окружность с диаметром a. В этом треугольнике

$$\angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = \angle CBA - \angle CAB.$$

Но так как треугольник ACB — прямоугольный, то $\angle CBA = 90° - \angle CAB$. Следовательно,

$$\angle DAC = 90° - 2\angle CAB = 90° - 2\alpha,$$

и мы имеем

$$b = a \sin(90° - 2\alpha) = a \cos 2\alpha.$$

Наконец, находим

$$CN = h = AC \sin \alpha = a \cos \alpha \sin \alpha.$$

Теперь получаем

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+b}{2} hH = \frac{1}{6} a^2 (1 + \cos 2\alpha) \cos \alpha \sin \alpha H =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot 4S \operatorname{tg} \alpha \, 2 \cos^2 \alpha \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{S \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha}{3} \sqrt{S^3 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Грань ABE образует с плоскостью $ABCD$ прямой угол. Для определения угла φ_1, образуемого гранью ADE с плоскостью $ABCD$, опустим перпендикуляр из O на AD (он изображается прямой OK, параллельной диагонали BD, так как последняя перпендикулярна к AD; диагональ BD на чертеже не изображена; $\angle EKO = \varphi_1$). В треугольнике AOK угол OAK равен $\angle ABC = 90° - \angle CAB = 90° - \alpha$. Поэтому

$$OK = AO \cdot \sin(90° - \alpha) = \frac{a}{2} \cos \alpha$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{H}{OK} = \frac{2H}{a \cos \alpha} = \frac{2H}{2H \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Для определения угла φ_2, образуемого гранью DCE с плоскостью $ABCD$, проводим $OL \perp DC$; $\angle ELO = \varphi_2$. Так как $OL = NC = h$, то

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{H}{h} = \frac{H}{a \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha}.$$

Отв.

$$V = \frac{\sin^2 2\alpha}{3} \sqrt{S^3 \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{cosec} \alpha); \quad \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \alpha\right).$$

676. Нужно определить (черт. 153) сумму площадей треугольников ABC, ABD и ACD. Площадь S_1 треугольника ABC равна

$$S_1=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Площадь S_2 треугольника ABD равна

$$S_2=\frac{1}{2}AB\cdot DE=AB\cdot\frac{1}{2}\frac{CE}{\cos\varphi}=\frac{S_1}{\cos\varphi};$$

площадь S_3 треугольника ACD равна

$$S_3=\frac{1}{2}AC\cdot CD=$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AB\cdot CE\cdot\operatorname{tg}\varphi=S_1\operatorname{tg}\varphi.$$

Черт. 153.



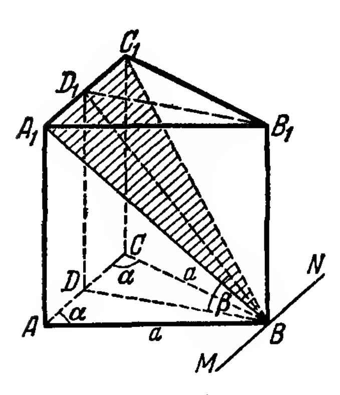
Следовательно,

$$S_{\text{бок}}=S_1+S_2+S_3=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}(1+\cos\varphi+\sin\varphi).$$

Выражение в скобках преобразуется, как указано в задаче **673**, и будет равно $2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$. Если в формуле для $S_{\text{бок}}$ в знаменателе $\cos\varphi$ представить как $\sin(90^\circ-\varphi)$, то выражение для $S_{\text{бок}}$ можно будет сократить на

$$\cos\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Отв. $$S_{\text{бок}}=\frac{a^2\sqrt{6}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)}.$$



Черт. 154.

677. Так как плоскость основания ABC (черт. 154) проходит через прямую AC, а плоскость сечения A_1BC_1 — через прямую A_1C_1, параллельную AC, то ребро MN двугранного угла β параллельно прямым AC и A_1C_1. Поэтому для построения линейного угла проводим $BD\perp AC$ и $BD_1\perp A_1C_1$ (точки D и D_1 будут серединами AC и A_1C_1).

Имеем

$$S_{бок} = (2AB + AC) \cdot DD_1 = (2AB + AC) \cdot BD \cdot \operatorname{tg} \beta = \\ = 2a^2(1 + \cos \alpha) \sin \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Объём V_1 четырёхугольной пирамиды $BACC_1A_1$ равен $\frac{2}{3}$ объёма V призмы (см. задачу **673**) и, следовательно,

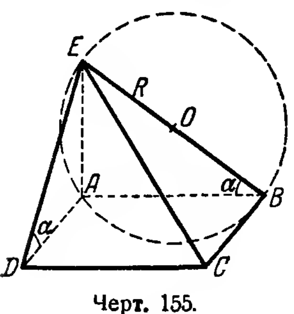
$$V_1 = \frac{2}{3} S \cdot DD_1,$$

где

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha.$$

Отв. $S_{бок} = 4a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$; $V_1 = \frac{a^3}{3} \sin 2\alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$.

678. Как в задаче **630**, докажем, что грань DCE (черт. 155) наклонена к плоскости основания $ABCD$ под углом $\alpha = \angle ADE$, а грань BCE — под равным ему углом $\alpha = \angle ABE$; обе эти грани — прямоугольные треугольники ($\angle CDE = \angle CBE = 90^\circ$).



Черт. 155.

Площадь S_1 треугольника ADE (а также равная ей площадь треугольника ABE) равна $S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AE$. Из треугольника ABE, где $BE = 2R$, находим

$$AB = 2R \cos \alpha,$$
$$AE = 2R \sin \alpha,$$

так что $S_1 = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Площадь S_2 треугольника CDE (а также треугольника CBE) равна

$$S_2 = \frac{1}{2} BC \cdot BE = \frac{1}{2} AB \cdot BE = 2R^2 \cos \alpha.$$

Имеем

$$S_п = S + 2S_1 + 2S_2 = 4R^2 (\cos^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha) = \\ = 4R^2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha + 1).$$

Выражение в скобках преобразуется, как указано в задаче **673**.

Отв. $S_п = 8\sqrt{2} R^2 \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

679. Плоскость сечения ECD (черт. 156), параллельного гипотенузе AB, пересекает плоскость грани ABB_1A_1 по прямой ED, параллельной AB. Опустив перпендикуляры CM и CF на прямые AB и ED, получим прямоугольный треугольник CMF, где $\angle CFM = \beta$ (доказать!). Следовательно,

$$\triangle CMF = \triangle CMB$$

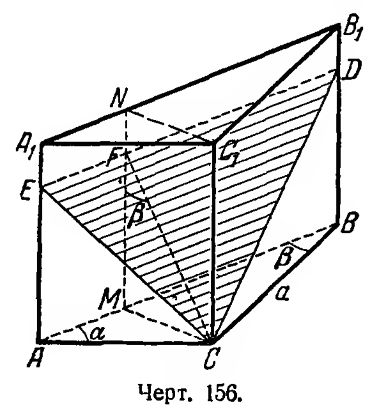
(у них общий катет MC и

$$\angle CBM = 90° - \alpha,$$

а по условию

$$\beta = 90° - \alpha).$$

Требуется найти объём V пирамиды $CABDE$, у которой основание $ABDE$ — прямоугольник, а высота равна $CM = a \sin\beta = a \cos\alpha$.



Черт. 156.

Имеем

$$V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot MF \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot MB \cdot CM =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot BC^2 \cdot CM = \frac{1}{3} a^3 \cos\alpha$$

(катет BC есть средняя пропорциональная между AB и MB).

Далее имеем

$$S_{бок} = (BC + AB + AC) H = aH\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right);$$

здесь aH есть площадь грани CBB_1C_1, которая по условию

равна площади $S_{сеч}$ треугольника CDE. Следовательно,

$$aH = S_{сеч} = \frac{1}{2} AB \cdot CF = \frac{1}{2} AB \cdot CB = \frac{a^2}{2 \sin \alpha}.$$

Значит,

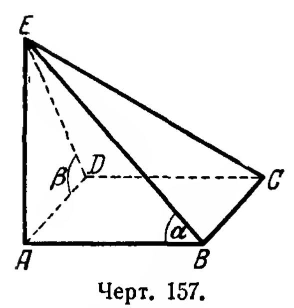
$$S_{бок} = \frac{a^2}{2 \sin \alpha}\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha\right) = \frac{a^2}{2 \sin^2 \alpha}(\sin \alpha + 1 + \cos \alpha).$$

Выражение в скобках преобразуется, как в задаче **673**.

Чтобы плоскость CDE пересекала грань ABB_1A_1, отрезок $MF = MB = a \sin \alpha$ должен быть меньше, чем отрезок $MN = H = \frac{a^2}{2 \sin \alpha} : a = \frac{a}{2 \sin \alpha}$. Из неравенства $a \sin \alpha < \frac{a}{2 \sin \alpha}$ находим $\sin^2 \alpha < \frac{1}{2}$, т. е. $\sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, угол α должен быть меньше $45°$.

Отв. $V = \frac{a^3 \cos \alpha}{3}$; $S_{бок} = \frac{\sqrt{2} a^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2 \alpha}$; $\alpha < 45°$.

680 (черт. 157). Боковая поверхность пирамиды будет



Черт. 157.

$$S_{бок} = \frac{H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2} + \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta}{2} + \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta}{2 \sin \alpha} + \frac{H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin \beta}.$$

Отсюда получим

$$S_{бок} = \frac{H^2}{2 \sin \alpha \sin \beta}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta + \cos \alpha).$$

Выражение в скобках можно привести к виду, удобному для логарифмирования, учитывая, что $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$ и $\cos \beta + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$. Получим

$$\sin(\alpha + \beta) + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Заменив $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ через $\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ и преобразовав выражение в скобках как сумму синусов, получим

$$4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right).$$

Отв. $S_{бок}=\dfrac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

681. Пусть $r=ON$ — радиус круга, вписанного в основание пирамиды[1]). Из треугольника DON (черт. 158) имеем $DO=H=r\operatorname{tg}\alpha$. Так как центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов A и B, то $\angle OAM=\frac{\alpha}{2}$ и

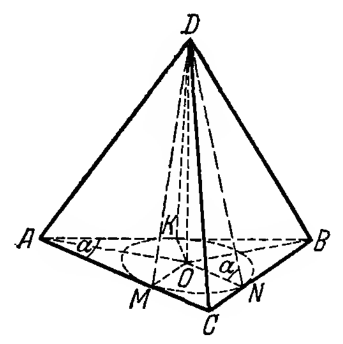
$$\angle OBN=\frac{90^\circ-\alpha}{2}=45^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

Так как угол C прямой, то четырёхугольник $MCNO$ — квадрат, так что $MC=CN=r$. Следовательно,

$$AC=b=AM+MC=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

и

$$CB=a=r\left[\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+1\right].$$



Черт. 158.

Выражения в скобках преобразуются, как в задаче **662**, после чего получаем

$$S_{осн}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{\sqrt{2}r\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

---

[1]) См. на стр. 342 предварительное замечание к задаче **617**.

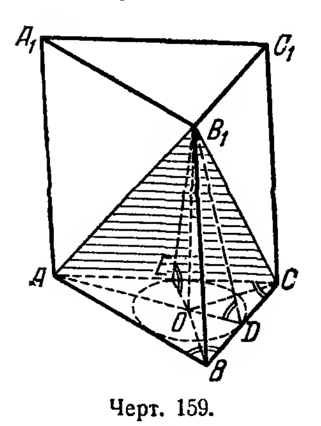
Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} r^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Это выражение можно упростить, если заметить, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin (90° - \alpha)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Боковую и полную поверхность можно найти по формулам



Черт. 159.

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos \alpha}; \quad S_п = \frac{2S_{осн} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \text{ }^{1)}.$$

Отв. $V = \dfrac{r^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$;

$$S_{бок} = \frac{r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$S_п = \frac{r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

682. Плоскость отсекает от призмы пирамиду B_1ABC (черт. 159), высота которой проходит через центр O окружности, вписанной в основание пирамиды; поэтому все боковые грани её образуют с плоскостью основания равные углы α; следовательно,

$$S_п = \frac{2S_{осн} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \text{ }^{1)}.$$

Находим

$$S_{осн} = \frac{BC \cdot AD}{2} = DC \cdot AD.$$

Из $\triangle OCD$, где $OD = r$ и $\angle OCD = \frac{\alpha}{2}$, находим $DC = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

---

[1]) См. на стр. 342 и 344 замечание к задачам **617** и **618**.

Из $\triangle ADC$ находим $AD = DC \cdot \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно,

$$S_{осн} = r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad S_п = \frac{2r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Полученные выражения можно упростить, представив $\operatorname{tg} \alpha$ в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Объём призмы

$$V = S_{осн} \cdot H,$$

где

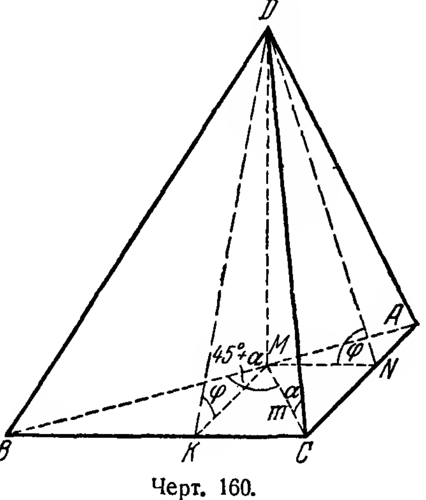
$$H = r \operatorname{tg} \alpha$$

(из $\triangle B_1OD$).

Отв.

$$S_п = \frac{4r^2 \cos^4 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \alpha};$$

$$V = r^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$



Черт. 160.

683. Из $\triangle BMC$ (черт. 160), где $\angle MCB = 45°$, а $\angle MBC = 180° - (45° + \alpha) - 45° = 90° - \alpha$, по теореме синусов имеем $\frac{BC}{\sin(45° + \alpha)} = \frac{m}{\sin(90° - \alpha)}$. Отсюда

$$BC = a = \frac{m \sin(45° + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Из $\triangle ABC$ находим

$$AC = b = a \operatorname{ctg} \alpha = \frac{m \sin(45° + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Из $\triangle DCM$ находим

$$H = m \operatorname{tg} \alpha.$$

Линейными углами для двугранных $DACB$ и $DBCA$ будут $\angle DNM$ и $\angle DKM$; эти углы равны, так как равны

треугольники MKC и MNC (по гипотенузе и острому углу) и треугольники DMK и DNM (по гипотенузе и катету). Обозначим их величину через φ; тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{H}{MN}$, где $MN = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

Отв. $V = \frac{1}{6} m^3 \frac{\sin^2(45^\circ + \alpha)}{\cos^2 \alpha}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha)$.

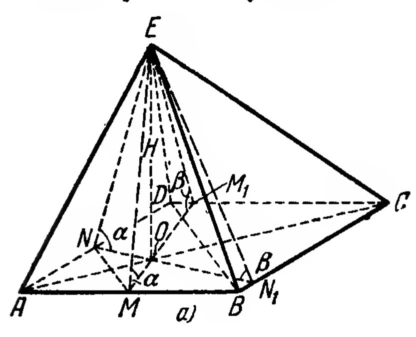
684. Пусть ABE (черт. 161, *а*) — первая, а ADE — вторая боковая грань. По условию они наклонены к основанию под одним и тем же углом α. Отсюда следует, что точка O, через которую проходит высота, лежит на диагонали AC. Действительно, если из точки O (черт. 161, *б*) опустить перпендикуляры OM и ON[1]) на стороны AB и AD, то $\angle OME = \alpha$ и $\angle ONE = \alpha$ (доказать!); следовательно,

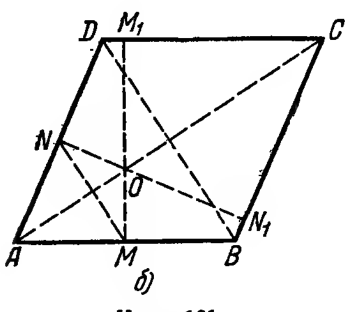
$$OM = H \operatorname{ctg} \alpha$$

и

$$ON = H \operatorname{ctg} \alpha,$$

т. е. $OM = ON$. Значит, точка O лежит на биссектрисе угла BAD, т. е. на диагонали AC ромба $ABCD$.





Черт. 161.

Но тогда также имеем $OM_1 = ON_1$ (OM_1 и ON_1 — продолжения OM и ON), откуда следует равенство треугольников OM_1E и ON_1E и, значит, $\angle ON_1E = \angle OM_1E$, что и требовалось доказать.

---

1) На пространственном чертеже (черт. 161, *а*) один из этих перпендикуляров, например OM, можно изобразить произвольной прямой, но после этого второй строится вполне определённым образом, так как прямая MN должна быть параллельна диагонали BD. Это легко доказать на плоском чертеже (черт. 161, *б*).

Из треугольника OME находим $OM = H\operatorname{ctg}\alpha$, а из треугольника OM_1E имеем $OM_1 = H\operatorname{ctg}\beta$. Следовательно, высота h ромба равна $h = MM_1 = H(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$.

Значит,

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H = \frac{1}{3}ahH = \frac{1}{3}aH^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta),$$

$$S_{\text{п}} = S_{\text{осн}} + 2S_{ABE} + 2S_{BEC} = a(h + ME + N_1E),$$

где $ME = \frac{H}{\sin\alpha}$, $N_1E = \frac{H}{\sin\beta}$.

Тогда

$$S_{\text{п}} = aH\left(\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\beta + \frac{1}{\sin\beta}\right) = aH\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}\right).$$

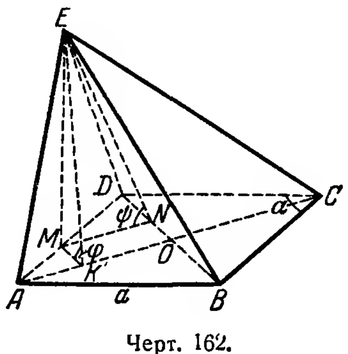
Выразив числители и знаменатели через $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ и сократив дроби, получим

$$S_{\text{п}} = aH\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Отв.

$$V = \frac{1}{3}aH^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = \frac{1}{3}aH^2\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$S_{\text{п}} = aH\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = \frac{aH\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$



Черт. 162.

685. Пусть $\angle A$ (черт. 162) — острый угол ромба, так что AC — большая диагональ и $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$. Проведём $MK \perp AC$ и $MN \perp BD$[1]). Пусть φ есть угол, под которым плоскость EAC наклонена к плоскости основания. Тогда $\angle MKE = \varphi$ и $\angle MNE = \psi$. Для определения H выразим MK и MN

[1]) На черт. 162 следует провести $MK \parallel BD$ и $MN \parallel AC$, так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны (ср. предыдущую сноску).

через H; получим $MK = H \operatorname{ctg} \varphi$ и $MN = H \operatorname{ctg} \psi$; эти выражения подставим в соотношение

$$a = AD = AM + MD = \frac{MK}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{MN}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

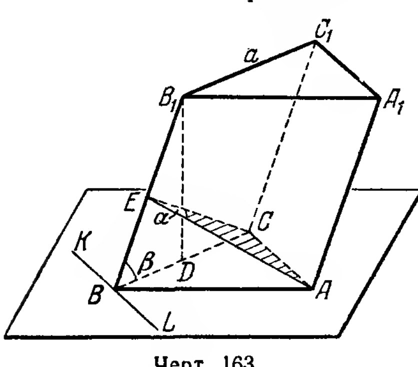
Получим

$$a = H\left(\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \psi}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right).$$

Отв. $V = \dfrac{a^3 \sin \alpha}{3\left(\dfrac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\operatorname{ctg} \psi}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right)} = \dfrac{a^3 \sin^2 \alpha}{6\left(\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \varphi + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \psi\right)}$,

где двугранный угол φ имеет ребром бо́льшую диагональ ромба, а угол ψ — меньшую.

686. На черт. 163 отрезок AB изображает гипотенузу основания. Для построения линейного угла α нужно пересечь ребро BB_1 плоскостью, перпендикулярной к этому ребру. В данном случае такую плоскость можно провести через катет AC. Чтобы доказать это, нужно доказать, что $AC \perp BB_1$.



Черт. 163.

По условию вершина B_1 проектируется в точку D (середина BC), лежащую на катете BC. Следовательно, если провести через B прямую KL, перпендикулярную к BC, то KL будет перпендикулярна также и к BB_1 (теорема о трёх перпендикулярах). А так как $AC \parallel KL$, то $AC \perp BB_1$, что и требовалось доказать.

Проведём через AC плоскость AEC, перпендикулярную к BB_1. Боковая поверхность призмы равна периметру $CE + AC + AE$ перпендикулярного сечения, умноженному на ребро BB_1. Из прямоугольного треугольника BCE, где $\angle CBE = \beta$ (доказать!) и $BC = a$, находим $CE = a \sin \beta$.

Прямая KL, а значит, и параллельная ей прямая AC, перпендикулярна к грани BB_1C_1C. Поэтому треугольник ACE — прямоугольный при вершине C. Значит, $AC = CE \operatorname{tg} \alpha$ и $AE = \frac{CE}{\cos \alpha}$, так что

$$CE + AC + AE = a \sin \beta \left(1 + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right).$$

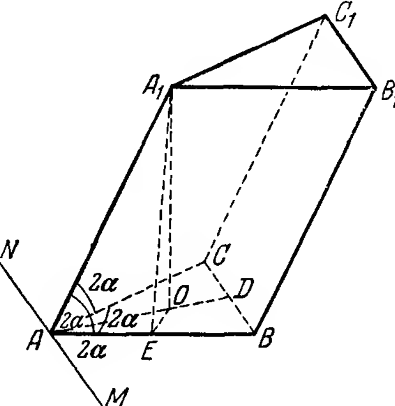
Ребро BB_1 находим из треугольника BDB_1, где $BD = \frac{a}{2}$. Получаем $BB_1 = \frac{a}{2 \cos \beta}$, так что

$$S_{бок} = (CE + AC + AE) \cdot BB_1 = \frac{a^2 \operatorname{tg} \beta}{2}\left(1 + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right).$$

Преобразуем выражение в скобках, как указано в задаче **673**, и $\cos \alpha$, как указано в задаче **681**.

Отв.

$$S_{бок} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$



Черт. 164.

687. Как в предыдущей задаче, докажем, что ребро $AA_1 \perp BC$ (черт. 164), а следовательно, и $BB_1 \perp BC$ и грань BB_1C_1C — прямоугольник. $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 2\alpha$ (доказательство см. в задаче **669**) и, следовательно, грань $AA_1C_1C = AA_1B_1B$. Точка E — середина стороны AB и $EO \perp AB$ (точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$); тогда $A_1E \perp AB$ (по теореме о трёх перпендикулярах). По теореме синусов имеем

$$AB = 2R \sin (90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha;$$

тогда

$$S_{осн} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 2\alpha = 2R^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha.$$

Из треугольника AA_1E имеем

$$AA_1 = l = \frac{AE}{\cos 2\alpha} = \frac{AB}{2\cos 2\alpha} = \frac{R\cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Из $\triangle AA_1O$ найдём

$$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \frac{R}{\cos 2\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha}.$$

(Подкоренное выражение преобразуем, как указано в задаче **656**.) Сторона $BC = 2BD = 2\cdot AB\cdot\sin\alpha$. Следовательно,

$$V = S_{осн}\cdot H = 2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha\frac{R}{\cos 2\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha} =$$
$$= 2R^3\cos^2\alpha \operatorname{tg} 2\alpha\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha}$$

и

$$S_{бок} = 2S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} = 2l\cdot AB\cdot\sin 2\alpha + 2l\cdot AB\cdot\sin\alpha =$$
$$= 2l\cdot AB(\sin 2\alpha + \sin\alpha).$$

Отв. $V = 2R^3\cos^2\alpha\operatorname{tg} 2\alpha\sqrt{\sin 3\alpha\sin\alpha}$;

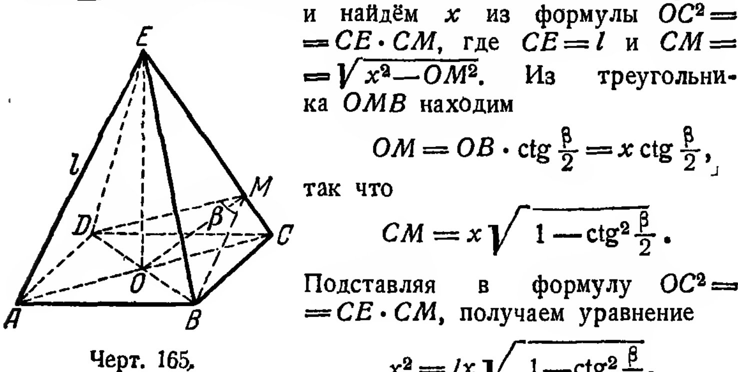
$$S_{бок} = \frac{8R^2\cos^2\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos 2\alpha}.$$

688. Проводим высоту OM треугольника OCE (черт. 165); тогда $\angle BMD = \beta$ (доказать!). Обозначим $OC = OB$ через x и найдём x из формулы $OC^2 = CE\cdot CM$, где $CE = l$ и $CM = \sqrt{x^2 - OM^2}$. Из треугольника OMB находим

$$OM = OB\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = x\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

так что

$$CM = x\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$



Черт. 165.

Подставляя в формулу $OC^2 = CE\cdot CM$, получаем уравнение

$$x^2 = lx\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Корень $x = 0$, очевидно, не соответствует условию, так что имеем

$$x = OC = l\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Следовательно,

$$H=\sqrt{CE^2-OC^2}=\sqrt{l^2-x^2}=l\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Теперь находим

$$V=\frac{1}{3}2x^2H.$$

Замечание. Величина $\cos\beta$ отрицательна, так как $\frac{\beta}{2}>45^\circ$ $\left(\text{ибо } \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{OB}{OM}=\frac{OC}{OM}\right.$, но наклонная OC больше перпендикуляра OM, следовательно, $\left.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}>1\right)$.

Отв. $V=\frac{2}{3}l^3\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{2}{3}l^3\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cos\beta}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

689. Из треугольника A_1FE (черт. 166), где $\angle A_1FE=\alpha$, находим $FE=H\operatorname{ctg}\alpha$, а из треугольника A_1CE, где $A_1C=d$, находим $EC=\sqrt{d^2-H^2}$ и, следовательно,

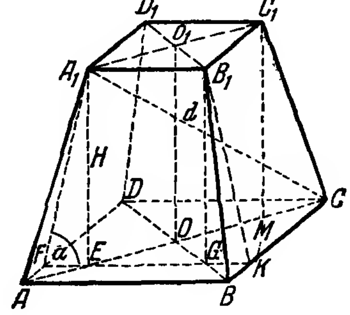
$$EK=\frac{EC}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{d^2-H^2}{2}}.$$

Теперь находим стороны оснований

$$AB=a=EK+EF$$

и

$$A_1B_1=EG=b=EK-GK=$$
$$=EK-EF,$$



Черт. 166.

так что для величины

$$a^2+ab+b^2,$$

входящей в формулу объёма усечённой пирамиды, получаем выражение

$$(EK+EF)^2+(EK+EF)(EK-EF)+(EK-EF)^2=$$
$$=3EK^2+EF^2.$$

Отв. $V=\frac{H}{3}(3\cdot EK^2+EF^2)=\frac{H}{6}[3(d^2-H^2)+2H^2\operatorname{ctg}^2\alpha]$.

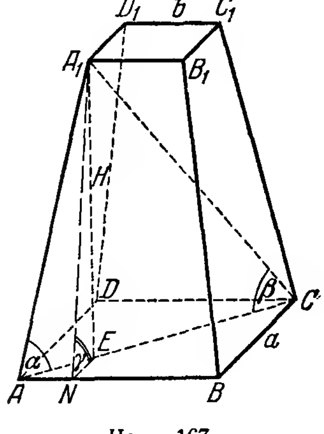
690. Можно использовать тот же черт. 166, что и в предыдущей задаче, введя обозначения $AA_1 = l$ и $\angle A_1AC = \beta$. Из прямоугольного треугольника AA_1C находим $AC = \frac{l}{\cos\beta}$, так что $a = FK = \frac{l}{\sqrt{2}\cos\beta}$. Из треугольника AA_1E находим $H = l\sin\beta$ и $AE = l\cos\beta$, так что $FE = \frac{l\cos\beta}{\sqrt{2}}$; следовательно,

$$b = EG = FK - 2FE = \frac{l}{\sqrt{2}\cos\beta}(1 - 2\cos^2\beta) = -\frac{l\cos 2\beta}{\sqrt{2}\cos\beta}.$$

Теперь получим

$$V = \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{l^3\sin\beta}{6\cos^4\beta}(1 - \cos 2\beta + \cos^2 2\beta).$$

Если числитель и знаменатель помножить на $(1 + \cos 2\beta)$ (применив формулу для суммы кубов), то получим несколько более простое выражение.



Черт. 167.

Замечание. Угол β должен быть больше 45°, так как $FK > 2 \cdot FE$. Поэтому $\cos 2\beta < 0$.

Отв.

$$V = \frac{l^3\sin\beta}{6\cos^2\beta}(1 - \cos 2\beta + \cos^2 2\beta) = \frac{l^3\sin\beta\,(1 + \cos^3 2\beta)}{12\cos^4\beta}.$$

691. Из треугольников AA_1E и EA_1C (черт. 167)[1]) имеем

$$AE = H\operatorname{ctg}\alpha \quad \text{и} \quad EC = H\operatorname{ctg}\beta.$$

Боковая поверхность равна

$$S_{бок} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot A_1N = 2(a+b) \cdot A_1N.$$

Апофему A_1N находим из треугольника A_1EN, где

$$EN = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{H}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\alpha;$$

[1]) Об изображении усечённой пирамиды см. стр. 348.

получаем

$$A_1N = H\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Сумма

$$a+b = AB + A_1B_1 = 2A_1B_1 + 2AN = 2\cdot NB = $$
$$= EC\cdot\sqrt{2} = H\cdot\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta.$$

Следовательно,

$$S_{бок} = 2H\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta\, H\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Отв. $S_{бок} = 2H^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

692. Из треугольника A_1EN (тот же черт. 167), где

$$EN = AN = \frac{AB - A_1B_1}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}-1),$$

находим

$$H = A_1E = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\operatorname{tg}\gamma$$

и

$$A_1N = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\cos\gamma}.$$

Теперь получаем

$$V = \frac{H}{3}(3a^2 + a^2 + a^2\sqrt{3}) = \frac{a^3}{6}(\sqrt{3}-1)(4+\sqrt{3})\operatorname{tg}\gamma$$

и

$$S_{бок} = 2(AB + A_1B_1)A_1N = 2a(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\cos\gamma} = \frac{2a^2}{\cos\gamma}.$$

Следовательно,

$$S_п = S_{бок} + 3a^2 + a^2 = \frac{2a^2(1+2\cos\gamma)}{\cos\gamma}.$$

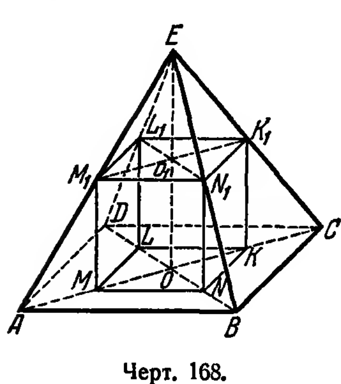
Выражение в скобках можно привести к виду, удобному для логарифмирования.

Отв. $V = \dfrac{a^3(3\sqrt{3}-1)\operatorname{tg}\gamma}{6} \approx 0{,}7a^3\operatorname{tg}\gamma;$

$$S_п = \frac{2a^2(1+2\cos\gamma)}{\cos\gamma} = \frac{8a^2\cos\left(\frac{\gamma}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}-30^\circ\right)}{\cos\gamma}.$$

693. Обозначим сторону куба через x (черт. 168). Из подобия треугольников EO_1K_1 и EOC имеем

$$\frac{EO_1}{EO}=\frac{O_1K_1}{OC}.$$



Черт. 168.

Здесь

$$EO_1=EO-OO_1=H-x,$$

$$EO=H, \quad O_1K_1=\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$OC=\sqrt{l^2-H^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{H-x}{H}=\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{l^2-H^2}}.$$

Отв. $x=\dfrac{H\sqrt{2(l^2-H^2)}}{H+\sqrt{2(l^2-H^2)}}$.

694. Из треугольника EOF (черт. 169), где $OF=\frac{a}{2}$ и $\angle OEF=\alpha$, имеем $H=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно, объём пирамиды

$$V=\frac{1}{3}a^2H=\frac{1}{6}a^3\operatorname{ctg}\alpha.$$

Выразим сторону a через ребро куба $x=MM_1$. Имеем

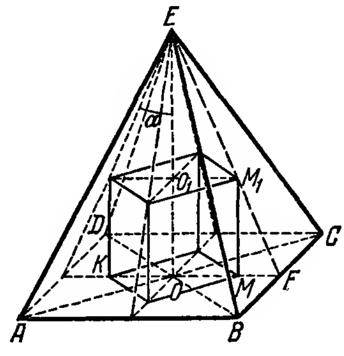
$$a=2OF=2OM+2MF=$$
$$=KM+2MM_1\cdot\operatorname{tg}\alpha=$$
$$=x\sqrt{2}+2x\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно,

$$V=\frac{x^3(\sqrt{2}+2\operatorname{tg}\alpha)^3\operatorname{ctg}\alpha}{6}.$$

Здесь $x^3=V_1$ есть объём куба.

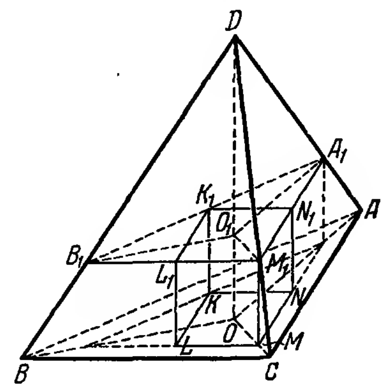
Отв. $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{(\sqrt{2}+2\operatorname{tg}\alpha)^3\operatorname{ctg}\alpha}{6}$.



Черт. 169.

695. а) Способ построения. Сначала изобразим то сечение $A_1M_1B_1$ (черт. 170), где лежит «верхняя» грань куба $K_1L_1M_1N_1$ (это сечение есть прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине M_1). Так как вершины K_1, L_1,

M_1, N_1 лежат на боковых гранях, то они находятся на сторонах треугольника $A_1M_1B_1$ (M_1 совпадает с вершиной прямого угла, прямая M_1K_1 изображает биссектрису прямого угла, ибо $M_1N_1 = M_1L_1$). Теперь изображаем куб $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Внутри четырёхугольника $K_1L_1M_1N_1$ берём произвольную точку O_1, изображающую пересечение высоты DO с гранью $K_1L_1M_1N_1$ и соединяем её с точкой O, сходственно расположенной в четырёхугольнике $KLMN$. Проводим прямые O_1A_1, O_1B_1, O_1M_1 и прямые OA, OB, OM, соответственно им параллельные. В пересечении DA_1, DB_1 и DM_1 соответственно с OA, OB и OM находим точки A, B, C — вершины основания пирамиды.



Черт. 170.

б) Решение. По условию $AC = 6$; $BC = 8$; $DO = 24$[1]). Обозначим ребро куба через x. Тогда $OO_1 = x$ и $DO_1 = 24 - x$. По свойству сечений, параллельных основанию пирамиды, имеем $B_1M_1 : BC = DO_1 : DO$, т. е. $B_1M_1 : 8 = (24 - x) : 24$, откуда

$$B_1M_1 = \frac{8(24 - x)}{24} = \frac{24 - x}{3}.$$

Из подобия треугольников $K_1B_1L_1$ и ABC имеем

$$K_1L_1 : B_1L_1 = 6 : 8;$$

здесь

$$K_1L_1 = x \quad \text{и} \quad B_1L_1 = B_1M_1 - M_1L_1 = \frac{24 - x}{3} - x = \frac{24 - 4x}{3}.$$

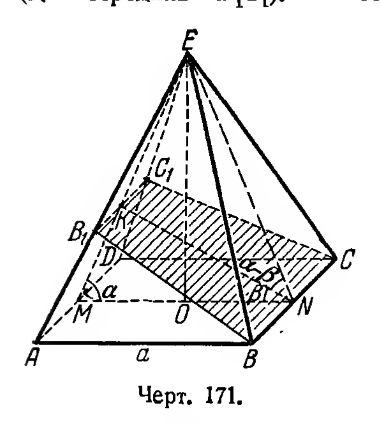
Следовательно, $x : \frac{24 - 4x}{3} = 6 : 8$, откуда $x = 3$.

Отв. 3.

---

[1]) На черт. 170 эти соотношения не соблюдены.

696. Сечение BCC_1B_1 (черт. 171) есть трапеция (доказать!). Проведём плоскость MNE (M и N — середины сторон AD и BC). Она пересечёт плоскость BCC_1B_1 по прямой NK (K — середина B_1C_1). Имеем $\angle NME = \angle MNE = \alpha$ и $\angle MNK = \beta$ (доказать!). Высота KN трапеции BCC_1B_1 находится из треугольника KNM, где $MN = a$ и $\angle MKN = 180° - (\alpha + \beta)$. По теореме синусов $\frac{KN}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$, т. е. $KN = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Теперь находим верхнее основание B_1C_1 трапеции; из подобия треугольников ADE и B_1C_1E имеем



Черт. 171.

$$B_1C_1 = \frac{a \cdot KE}{ME} = \frac{a \cdot KE}{NE}.$$

Отношение $\frac{KE}{NE}$ найдём из треугольника KNE, где $\angle KNE = \alpha - \beta$, а $\angle NKE = \alpha + \beta$ (как внешний для $\triangle KNM$). Получаем

$$\frac{KE}{NE} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)};$$

следовательно,

$$B_1C_1 = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Площадь сечения

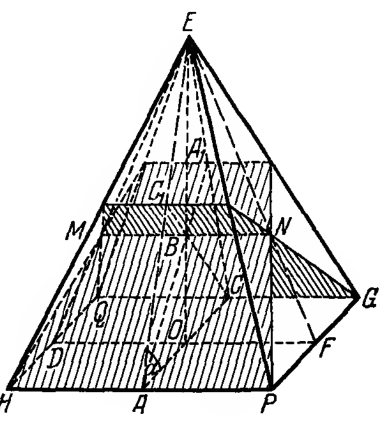
$$S_{\text{сеч}} = \frac{a + \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}{2} \cdot \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Отв. $S_{\text{сеч}} = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

697. а) Способ изображения. Сделав изображение пирамиды $EHPGQ$ (черт. 172), изображаем прямую MN, по которой пересекаются плоскости; она параллельна стороне HP и пересекает ось OE в точке B. Концы M и N отрезка MN

лежат на апофемах EF и ED. Проведя PN и GN, HM и QM, получаем изображение плоскостей, пересекающихся по MN. Отметим точки A_1 и C_1, лежащие на пересечении AB и CB с апофемами EA и EC (A и C — середины HP и QG). Угол ABC — линейный угол получившегося двугранного угла. По условию $\angle ABC = 90°$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный прямоугольный и

$$BO = AO = \frac{a}{2}.$$



Черт. 172.

б) Решение. Из подобия треугольников EMN и EDF, где $DF = a$, имеем $MN = a \cdot \frac{EB}{EO}$. Угол OAE есть линейный для двугранного угла α, так что $EO = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Кроме того, $EB = EO - BO = = \frac{a}{2}(\operatorname{tg} \alpha - 1)$. Следовательно,

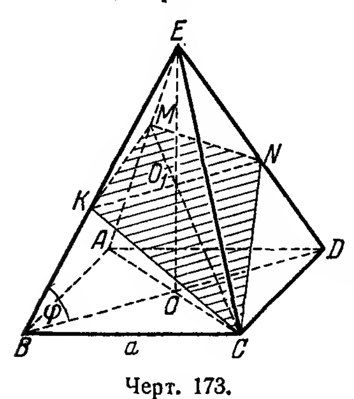
$$MN = a\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha} = a(1 - \operatorname{ctg} \alpha).$$

Отв. $MN = a(1 - \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\sqrt{2}\, a \sin(\alpha - 45°)}{\sin \alpha}$.

698. а) Способ изображения. Проводим прямую CM (черт. 173), изображающую перпендикуляр, опущенный из C на AE. Через точку O_1, где CM встречает EO, проводим $KN \parallel BD$. Четырёхугольник $KCNM$ изображает сечение. Доказательство следует из нижеприводимого решения.

б) Решение. Так как плоскость $KCNM$ перпендикулярна к ребру AE, то стороны MK и MN, а также диагональ CM сечения $KCNM$ перпендикулярны к AE. Так как диагональ CM лежит в плоскости равнобедренного треугольника AEC, то она пересекает прямую EO, являющуюся высотой этого треугольника. С другой стороны, диагональ KN,

лежащая в плоскости треугольника BED (и, как сейчас будет доказано, параллельная основанию BD этого треугольника), тоже пересекает прямую EO, являющуюся высотой треугольника BED. А так как плоскость $KCNM$ имеет с прямой OE только одну общую точку O_1, то в этой точке диагонали KN и MC пересекаются друг с другом.



Черт. 173.

Плоскость $KCNM$ перпендикулярна к ребру AE; поэтому углы EMK и EMN — прямые. Прямоугольные треугольники EMK и EMN равны (доказать!); следовательно, $MK=MN$ и $EK=EN$. Из последнего равенства вытекает, что $KN \parallel BD$ и что $KO_1=O_1N$. Следовательно, диагонали MC и KN взаимно перпендикулярны и, значит, $S_{сеч}=\frac{1}{2} MC \cdot KN$.

Диагональ MC находим из прямоугольного треугольника AMC, где $\angle CAM=\varphi$ и $AC=a\sqrt{2}$. Получаем $MC=a\sqrt{2}\sin\varphi$.

Диагональ KN находим из равнобедренного треугольника KEN, где $\angle EKN=\varphi$. Имеем $KN=2\cdot O_1E\cdot \operatorname{ctg}\varphi$, где $O_1E=OE-OO_1$. Отрезок OE определяется из треугольника AOE (или BOE); находим $OE=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{tg}\varphi$. Отрезок же OO_1 определяется из треугольника OCO_1, где $\angle OCO_1=90°-\angle MAC=90°-\varphi$. Находим

$$OO_1=OC\cdot \operatorname{tg}(90°-\varphi)=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Теперь получаем

$$KN=2\cdot O_1E\cdot\operatorname{ctg}\varphi=2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\varphi-\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right)\operatorname{ctg}\varphi=$$
$$=a\sqrt{2}\,(1-\operatorname{ctg}^2\varphi).$$

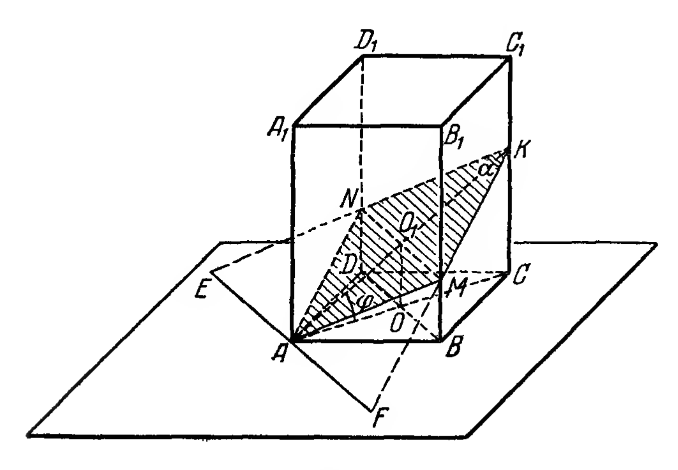
Следовательно,

$$S_{сеч}=\frac{1}{2}MC\cdot KN=a^2(1-\operatorname{ctg}^2\varphi)\sin\varphi=-\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}.$$

Замечание. Для того чтобы плоскость $KCNM$, перпендикулярная к AE, дала бы сечение пирамиды, нужно, чтобы точка M её пересечения с прямой AE лежала на отрезке AE (а не на его продолжении), а для этого угол AEC должен быть острым, т. е. $\angle AEC = 180° - 2\varphi < 90°$. Следовательно, $\varphi > 45°$, а поэтому $\cos 2\varphi$ есть величина отрицательная.

$$\textit{Отв.}\quad S_{сеч} = -\frac{a^2 \cos 2\varphi}{\sin \varphi} = \frac{a^2 \cos (180° - 2\varphi)}{\sin \varphi}.$$

699. Четырёхугольник $AMKN$ (черт. 174), получающийся в сечении боковой поверхности призмы, всегда является параллелограммом (доказать!). Чтобы он был ромбом, должно



Черт. 174.

быть $AM = AN$. Из равенства треугольников ADN и ABM (доказать!) следует, что $DN = BM$. Значит, прямая MN параллельна прямой BD, а значит, и плоскости $ABCD$. Следовательно, прямая EF, по которой плоскость $AMKN$ пересекается с плоскостью $ABCD$, параллельна диагонали MN (и диагонали BD), а значит, перпендикулярна к другой диагонали ромба AK (и диагонали AC). Отсюда следует, что $\varphi = \angle CAK$ есть линейный угол искомого двугранного угла. Прямая OO_1, соединяющая центр ромба O_1 с центром основания призмы, перпендикулярна к основанию (доказать!).

Из треугольника AOO_1 находим

$$\cos\varphi = \frac{AO}{AO_1} = \frac{OB}{AO_1} = \frac{O_1M}{AO_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

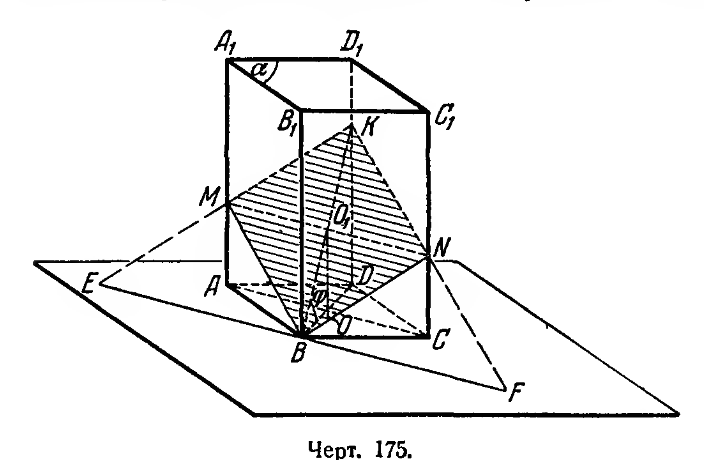
Замечание. Плоскость, проведённая через прямые AM и AN, пересечёт ребро CC_1 лишь в том случае, если $CC_1 \geqslant CK$, т. е. если высота призмы не меньше, чем

$$a\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

В противном случае ни через точку A, ни тем более через другую точку ребра AA_1 требуемого сечения провести нельзя.

Отв. $\varphi = \arccos\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Задача имеет решение только при условии $H \geqslant \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

700[1]) (ср. решение предыдущей задачи). Так как $MN = AC$ (черт. 175) и $BK > BD$, а по условию должно



Черт. 175.

быть $BK = MN$, то $AC > BD$, т. е. AC есть бóльшая

[1]) Об изображении прямой призмы см. стр. 331 (черт. 83).

диагональ ромба, так что $\angle ABC$ — тупой, а $\angle BAD$ — острый.

Угол $\varphi = \angle OBO_1$ — есть линейный угол искомого двугранного угла. Из треугольника OO_1B имеем $\cos\varphi = \frac{OB}{O_1B}$, где $OB = OA \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. А так как $OA = O_1M = O_1B$, то $\cos\varphi = \frac{O_1B \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{O_1B} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Здесь $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 1$, так как α — острый угол.

Отв. $\varphi = \arccos \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; задача имеет решение только при условии

$$DD_1 \geqslant \frac{BD\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

701. Ср. предыдущую задачу. Площадь $S_{сеч}$ ромба $BNKM$ (черт. 176) равна

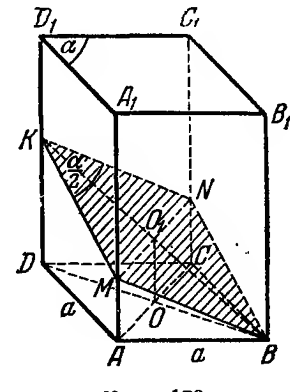
$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot BK = 2\,MO_1 \cdot BO_1.$$

Из треугольника MO_1B, где $\angle MBO_1 = \frac{\alpha}{4}$, находим:

$$BO_1 = MO_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

Следовательно,

$$S_{сеч} = 2 \cdot MO_1^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} = 2 \cdot AO^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

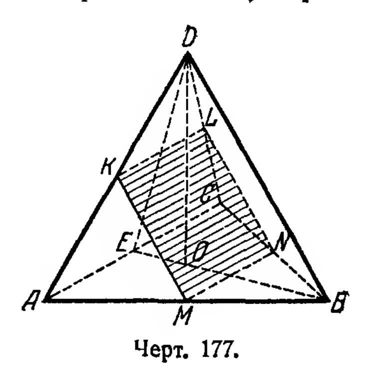


Черт. 176.

Отрезок AO находим из треугольника AOB, где $AB = a$ и $\angle ABO = \frac{\alpha}{2}$. Получаем $AO = a\sin\frac{\alpha}{2}$.

Отв. $S_{сеч} = 2a^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

702[1]. Пусть секущая плоскость проводится через середину M (черт. 177) ребра AB параллельно рёбрам AC и BD. Ребро AC лежит в плоскости ABC. Поэтому плоскость, проведённая через M параллельно AC, пересекает грань ABC



Черт. 177.

по прямой MN, параллельной AC. Значит, MN — средняя линия треугольника ABC $\left(MN=\frac{1}{2}AC=\frac{b}{2}\right)$, т. е. N есть середина ребра BC. Ребро BD лежит в плоскости BCD, а плоскость сечения параллельна ребру BD. Поэтому $NL \parallel BD$ $\left(NL=\frac{1}{2}BD=\frac{b}{2}\right)$ и L — середина ребра CD. Так же докажем, что $MK=\frac{b}{2}$ и что K — середина ребра AD.

Следовательно,

$$KL \parallel AC \text{ и } KL=\frac{b}{2}.$$

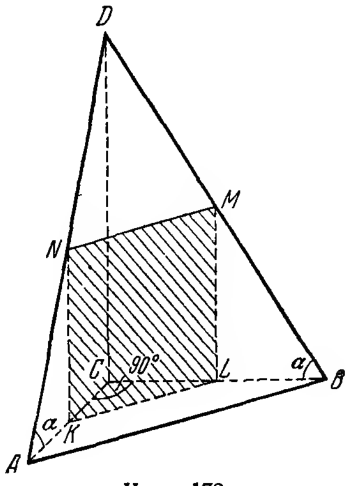
Значит, сечение $MNLK$ есть ромб. Но кроме того, угол NMK — прямой. Действительно, ребро BD лежит в плоскости BDE (E — середина AC), а эта плоскость перпендикулярна к ребру AC. Следовательно, $BD \perp AC$. Но по доказанному $MK \parallel BD$ и $MN \parallel AC$; значит, $MK \perp MN$. Из этого следует, что $MNLK$ — квадрат со стороной $\frac{b}{2}$.

Отв. $S_{\text{сеч}}=\frac{b^2}{4}$.

---

[1]) Об изображении правильной треугольной пирамиды см. стр. 330 (черт. 82).

703. Пусть CD (черт. 178) есть боковое ребро, перпендикулярное к плоскости основания. Так как по условию $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$, то $AC = CB$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный при вершине C и, значит, по условию $\angle C = 90°$.



Черт. 178.

Всякое сечение пирамиды, перпендикулярное к основанию ABC, есть четырёхугольник $NKLM$ с двумя прямыми углами ($\angle NKL$ и $\angle KLM$). Чтобы этот четырёхугольник был квадратом, должно быть $KN = KL = LM = x$. Из равенства треугольников AKN и BLM (доказать!) следует, что $AK = BL$, а значит, $KC = CL$, так что $KC = \frac{KL}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Из треугольника AKN находим $AK = KN \cdot \operatorname{ctg} \alpha = x \operatorname{ctg} \alpha$. Так как $KC + AK = AC = a$, то получаем уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + x \operatorname{ctg} \alpha = a,$$

откуда

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Отв.

$$S_{\text{сеч}} = x^2 = \frac{2a^2}{(1 + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha)^2}.$$

Черт. 179.

704. В сечении получится трапеция MA_1B_1N (черт. 179), равная боковой грани DD_1C_1C (доказать!). В отсечённой части $A_1B_1C_1D_1MNCD$ имеем $A_1D_1 = B_1C_1 = NC = MD$, как отрезки параллельных между параллельными плоскостями. Полученное тело есть наклонная призма с основанием CC_1D_1D. Через апофему FG усечённой

пирамиды и апофему OG основания проведём плоскость $FGQQ_1$; получим $\angle FGL = \alpha$ (доказать!). Перпендикуляр LK, опущенный из L на прямую GF, будет высотой призмы (доказать!). Из треугольника LKG, где $LG = Q_1F = a$, имеем $LK = a \sin \alpha$. Из треугольника FLG находим $FG = \frac{LG}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}$. Объём призмы V вычислим по формуле

$$V = \frac{D_1C_1 + DC}{2} \cdot FG \cdot LK.$$

Найдём полную поверхность S тела AMA_1B_1NB, отсечённого плоскостью A_1B_1NM. Грань AA_1B_1B равновелика сечению MA_1B_1N (доказать!). Каждая из этих граней имеет площадь $S_1 = \frac{a + 3a}{2} \cdot QQ_1$, где $QQ_1 = FG = \frac{a}{\cos \alpha}$. Каждая из граней AA_1M и BNB_1 имеет площадь $S_2 = \frac{AM \cdot A_1P}{2}$, где $AM = AD - MD = 3a - a = 2a$ и $A_1P = FG = \frac{a}{\cos \alpha}$. Площадь S_3 грани $ABNM$ равна $S_3 = AM \cdot AB = 2a \cdot 3a$. Имеем

$$S = 2S_1 + 2S_2 + S_3.$$

Отв. $V = 2a^3 \operatorname{tg} \alpha$; $S = \dfrac{12a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

Предварительное замечание к задаче 705 и следующим

При решении задачи **705** и трёх следующих мы воспользуемся следующей теоремой.

Если многоугольник $ABCDE\ldots$, лежащий в плоскости P, проектируется на плоскость P_1 (проекция — прямоугольная), *многоугольником $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, то площадь S многоугольника $ABCDE\ldots$ и площадь S_1 многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$ связаны соотношением*

$$S_1 = S \cos \alpha,$$

где α — угол между плоскостями P и P_1.

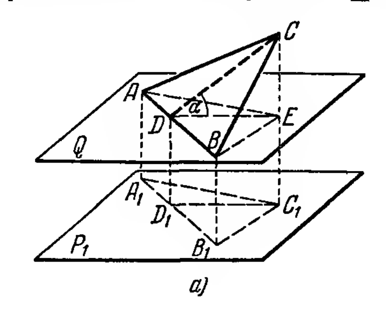
На вступительных экзаменах нередко предлагаются задачи, при решении которых трудно обойтись без этой теоремы [1]).

[1]) См., например, задачи **705** и **706**.

Между тем она не содержится в наших учебниках тригонометрии. Поэтому мы даём её доказательство.

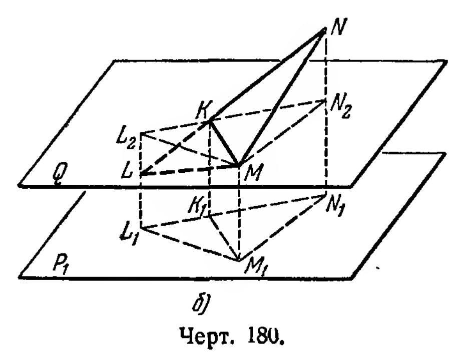
Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда проектируемая фигура есть треугольник ABC (черт. 180, *а*), у которого одна сторона AB параллельна плоскости проекций P_1. Проведём через AB плоскость Q, параллельную плоскости P_1 (E — точка пересечения с проектирующей прямой CC_1). Получим треугольник ABE, равный треугольнику $A_1B_1C_1$. Проведём высоту CD треугольника ACB; прямая ED будет высотой треугольника AEB, а угол $\alpha = \angle EDC$ будет линейным для двугранного угла $CABE$, равного углу между плоскостями P и P_1. Из треугольника DCE находим $DE = CD \cdot \cos\alpha$. Следовательно,

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} AB \cdot DC \cdot \cos\alpha = S\cos\alpha.$$



а)

Затем рассмотрим случай, когда проектируемая фигура есть треугольник LMN (черт. 180, *б*), стороны которого не параллельны плоскости P_1. Такой треугольник можно разбить на два треугольника типа, рассмотренного выше. Для этого достаточно через одну из его вершин M (не самую близкую и не самую далёкую от плоскости P_1) провести плоскость Q, параллельную P_1; она пересечёт треугольник LMN по прямой KM, параллельной P_1. Если S' и S'' — площади треугольников KMN и LMK, а S_1' и S_1'' — площади их проекций (треугольников $K_1M_1N_1$ и $L_1M_1K_1$), то по доказанному



б)

Черт. 180.

$$S_1' = S'\cos\alpha \text{ и } S_1'' = S''\cos\alpha.$$

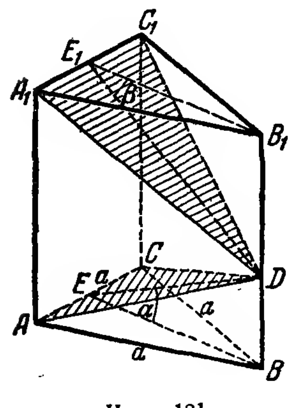
А так как $S = S' + S''$ и $S_1 = S_1' + S_1''$, то

$$S_1 = S_1' + S_1'' = S'\cos\alpha + S''\cos\alpha = (S' + S'')\cos\alpha = S\cos\alpha.$$

В случае, когда многоугольник имеет более трёх сторон, мы разобьём его на треугольники и, рассуждая как в предыдущем случае, докажем общую теорему.

Заметим, что эта теорема справедлива и для площадей криволинейных фигур. Для доказательства нужно вписать в криволииейиую фигуру миогоугольиик и совершить переход к пределу.

705. Имеем (черт. 181) $S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $H=BB_1=BD+DB_1$. Из треугольников BED и B_1E_1D (E и E_1 — середины AC и A_1C_1) имеем



Черт. 181.

$$BD=BE\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

и

$$B_1D=\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно,

$$V=S_{осн}\cdot H=\frac{3a^3}{8}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\frac{3a^3\sin(\alpha+\beta)}{8\cos\alpha\cos\beta}.$$

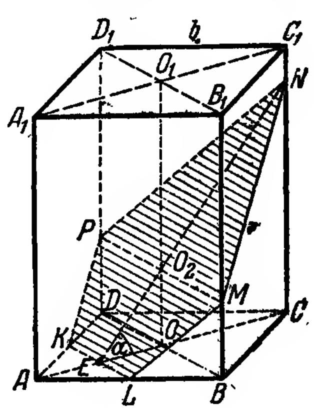
Сечение ADC проектируется на плоскость нижнего основания треугольником ABC. По доказанному (см. предварительное замечание) площадь S сечения ADC и площадь треугольника ABC, т. е. $S_{осн}$, связаны соотношением $S_{осн}=S\cos\alpha$, так что $S=\frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$. Таким же образом (проектируя сечение A_1DC_1 на верхнее основание), найдём, что площадь S' сечения A_1DC_1 равна $S'=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}$. Следовательно,

$$S+S'=S_{осн}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right).$$

Отв. $V=\frac{3a^3\sin(\alpha+\beta)}{8\cos\alpha\cos\beta}$;

$$S+S'=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{a^2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

706. а) Способ изображения. Соединяем середины K и L (черт. 182) сторон AB и AD. Через точку E, где KL пересекает AC, проводим прямую EN (угол NEC изображает линейный угол двугранного угла α). Через точку O_2, где EN пересекается с OO_1 (изображение оси), проводим $PM \parallel BD$. Пятиугольник $KLMNP$ изображает сечение. Доказательство вытекает из нижеприводимого решения.



Черт. 182.

б) Решение. Так как $KL \parallel BD$, то плоскость $KLMNP$ (проходящая через KL) пересекается с диагональной плоскостью DBB_1D_1 (проходящей через BD) по прямой PM, параллельной KL и BD. Ось призмы OO_1 лежит в диагональной плоскости DBB_1D_1 и, следовательно, пересекается с прямой PM. С диагональной плоскостью ACC_1A_1 плоскость $KLMNP$ пересекается по прямой NE (E — середина KL); эта прямая тоже пересекает ось OO_1. Но так как плоскость $KLMNP$, в которой лежат прямые PM и EN, пересекается с осью OO_1 только в одной точке O_2, то обе прямые EN и MP проходят через эту точку, т. е. точка пересечения прямых PM и EN лежит на оси OO_1. Прямые EC и EN перпендикулярны к KL (теорема о трёх перпендикулярах); значит, $\angle CEN = \alpha$.

Площадь S пятиугольника $KLBCD$ равна площади квадрата $ABCD$ без площади треугольника AKL, так что $S = b^2 - \frac{b^2}{8} = \frac{7}{8} b^2$. Площадь $S_{\text{сеч}}$ пятиугольника $KLMNP$ определяется по теореме, доказанной в предварительном замечании к задаче **705** (стр. 416). Имеем $\frac{7}{8} b^2 = S_{\text{сеч}} \cos \alpha$, т. е.

$$S_{\text{сеч}} = \frac{7b^2}{8 \cos \alpha}.$$

Сравнивая треугольники MO_2N и BOC (у них $BO = MO_2$ и $MN > BC$), убеждаемся, что $\angle MNO_2 < \angle BCO$; а так как

$\angle BCO = 45°$, то $\angle MNO_2 < 45°$, и следовательно, угол $\varphi = \angle MNP$ — острый. Остальные углы сечения — тупые (острый угол $NMO_2 = 90° - \angle MNO_2$ больше 45°; угол MLK равен $180° - \angle LMO_2 = 180° - \angle NMO_2$). Из треугольника MO_2N имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{MO_2}{NO_2},$$

но

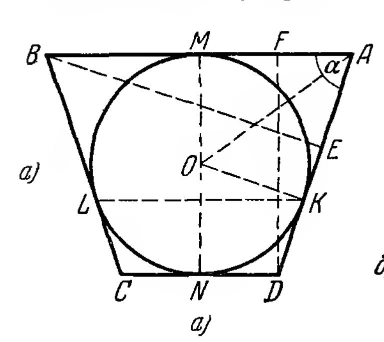
$$NO_2 = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{MO_2}{\cos\alpha}.$$

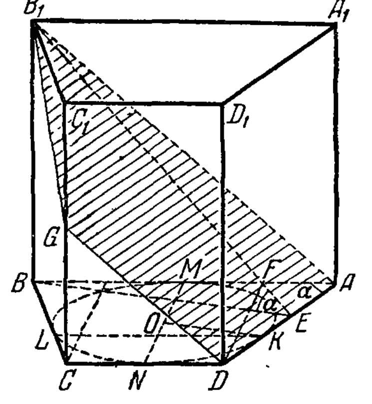
Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \cos\alpha.$$

Отв. $S_{\text{сеч}} = \frac{7b^2}{8\cos\alpha}$; $\varphi = 2\operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha)$.

707. а) Способ изображения. Сначала начертим отдельно основание призмы (черт. 183, *а*). Затем проведём эллипс (черт. 183, *б*), изображающий круг, около которого описано основание [1]). Проведём





Черт. 183.

какой-либо диаметр MN эллипса, и через концы его проведём касательные CD и AB; они изображают прямые, на которых лежат основания равнобочной трапеции. Проводим какую-либо прямую KL, параллельную CD и AB. Через

---

[1]) О вычерчивании эллипса см. стр. 339 (черт. 92).

точки K и L, в которых она пересекает эллипс, проводим касательные к эллипсу (DA и BC). Четырёхугольник $ABCD$ изображает равнобочную трапецию, описанную около круга. Далее строим изображение прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Секущая плоскость, проходящая через боковую сторону AD и вершину B_1, пересечёт грань AA_1B_1B по прямой AB_1, а параллельную ей грань — по прямой DG, параллельной AB_1. В сечении получаем четырёхугольник AB_1GD. Из точки B проводим прямую BE, параллельную радиусу OK, ведущему в точку касания K. Эта прямая изображает перпендикуляр, опущенный из B на AD. Следовательно, угол BEB_1 есть изображение линейного угла α.

б) Решение. Из треугольника DFA (черт. 183, *б*), где $DF = MN = 2r$ и $\angle DAF = \alpha$, находим $BC = AD = \frac{2r}{\sin\alpha}$. Обозначим AB через a, CD — через b, $AD = BC$ — через c. По свойству описанного четырёхугольника

$$a + b = AB + CD = AD + BC = 2c = \frac{4r}{\sin\alpha}.$$

Имеем

$$S_{\text{осн}} = \frac{a+b}{2}h = \frac{2r}{\sin\alpha}\cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}.$$

Следовательно (см. предварительное замечание к задаче **705**),

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha} = \frac{4r^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{8r^2}{\sin 2\alpha}.$$

Высоту $H = BB_1$ найдём из треугольника BB_1E, предварительно определив BE из треугольника BEA, где

$$AB = a = 2AM = 2OM\cdot\operatorname{ctg}\angle OAM = 2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Имеем

$$BE = a\sin\alpha \quad \text{и} \quad H = BE\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно,

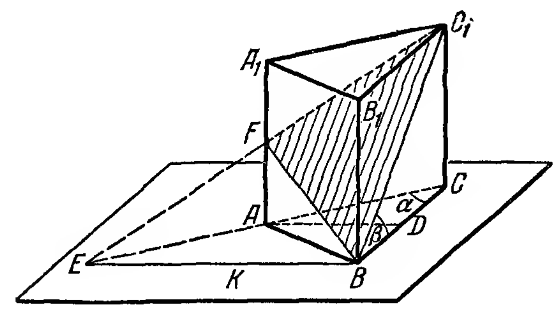
$$H = 2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha.$$

Теперь находим

$$S_{\text{бок}} = H(a + b + 2c) = 4\,Hc.$$

Отв. $S_{\text{бок}} = 16r^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $\quad S_{\text{сеч}} = \frac{8r^2}{\sin 2\alpha}$.

708. а) Способ изображения. Секущую плоскость P можно провести через любую из двух диагоналей грани BCC_1B_1 (черт. 184). Проведём её через диагональ BC_1. По условию $P \parallel AD$. Следовательно, плоскость P пересечёт плоскость основания ABC по прямой BK, параллельной AD (прямая BK целиком лежит вне треугольника ABC). Так как грань BCC_1B_1 перпендикулярна к AD, то она перпендикулярна и к прямой BK; значит, $\angle CBC_1$ есть линейный угол двугранного угла β при ребре BK.



Черт. 184.

Изобразим теперь треугольник, являющийся сечением призмы плоскостью P. Одна сторона этого треугольника (BC_1) известна; остаётся найти противоположную вершину, т. е. пересечение плоскости P с ребром AA_1. Для этого достаточно соединить точку E, в которой прямая BK пересекает продолжение ребра AC, с точкой C_1. Точка F, где прямая C_1E пересечёт ребро AA_1, будет искомой вершиной.

Докажем это. Так как точка E лежит на прямой BE, по которой пересекаются плоскости P и ABC, то эта точка принадлежит плоскости P. С другой стороны, точка E лежит на прямой AC, по которой пересекаются плоскости ACC_1A_1 и ABC; значит, она принадлежит плоскости ACC_1A_1 (она находится на продолжении грани ACC_1A_1). Следовательно, точка E должна принадлежать линии пересечения плоскостей P и ACC_1A_1. Точка C_1 по условию тоже принадлежит пересечению тех же плоскостей. Следовательно, плоскости P и ACC_1A_1 пересекаются по прямой C_1E, т. е. на этой прямой лежит сторона (C_1F) сечения, находящаяся на грани CC_1A_1A.

Значит, точка F, где C_1E пересекается с ребром AA_1, есть искомая вершина.

б) Решение. Так как треугольник ABC есть проекция треугольника FBC_1, лежащего в плоскости P, на плоскость основания, то

$$S_{сеч}=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha}{\cos\beta},$$

где $a=AC$ — боковая сторона равнобедренного треугольника ABC. Выразим a^2 через боковую поверхность S.

Имеем

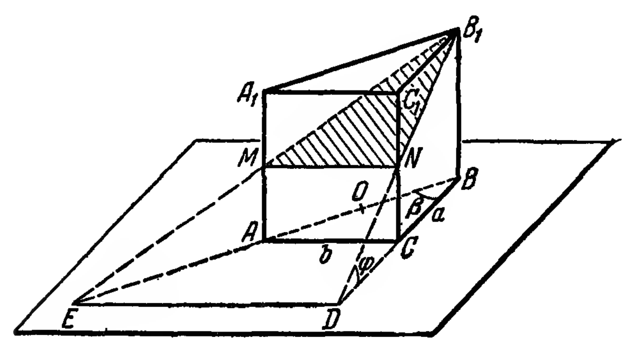
$$S=(2AC+BC)\cdot CC_1,$$

где $AC=a$, $BC=2a\cos\alpha$ и $CC_1=BC\cdot\operatorname{tg}\beta=2a\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$. Следовательно,

$$S=4a^2\cos\alpha\,(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta=8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Отв. $S_{сеч}=\dfrac{S}{16}\dfrac{\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\cos\beta\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\sin\beta}$.

709. а) Способ изображения. Продолжив отрезок BC (черт. 185), изображающий катет основания, на расстоя-



Черт. 185.

ние $CD=BC$, получаем точку D, которая в натуре симметрична с B относительно катета AC. Возьмём точку M на

середине ребра AA_1 и изобразим сечение призмы плоскостью P, проходящей через точки B_1, M и D. Для этого соединим точки B_1 и D. В пересечении с ребром CC_1 найдём точку N. Треугольник B_1NM будет искомым сечением. Действительно, точка D лежит на прямой BC и, значит, принадлежит плоскости CBB_1C_1 (D находится на продолжении грани CBB_1C_1). Но точка D лежит также и на плоскости P, поэтому она находится на линии пересечения плоскости P с CBB_1C_1. Точно так же и точка B_1 находится на этой линии. Значит, плоскости P и BCC_1B_1 пересекаются по прямой B_1D. Точка N, где B_1D пересекается с ребром CC_1, есть одна из вершин сечения, так что сечение призмы есть треугольник B_1NM.

Так как $BC = CD$ и $CN \parallel BB_1$, то CN есть средняя линия треугольника BB_1D, т. е. N — середина ребра CC_1. Следовательно, прямая MN параллельна прямой AC, лежащей в плоскости основания. Вследствие этого и прямая DE, по которой плоскость P пересечёт плоскость основания, параллельна AC и, значит, перпендикулярна к плоскости грани BCC_1B_1. Поэтому $\angle BDB_1$ есть линейный угол двугранного угла φ при ребре DE.

б) Решение. Имеем (см. решение предыдущей задачи)

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi} = \frac{ab}{2\cos\varphi}$$

(где $a = BC$, $b = AC$), а так как $b = a\operatorname{tg}\beta$, то

$$S_{\text{сеч}} = \frac{a^2\operatorname{tg}\beta}{2\cos\varphi}.$$

Найдём a^2. По условию β есть меньший из острых углов треугольника ABC, так что $b < a$ и площадь bH грани ACC_1A_1 меньше площади aH грани BCC_1B_1. Поэтому разность S этих площадей (предполагаем, что она положительна) равна $(a - b)H$. Из треугольника DBB_1, где $BD = 2BC = 2a$, находим $H = 2a\operatorname{tg}\varphi$. Следовательно,

$$S = 2a^2(1 - \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\varphi.$$

Отсюда находим a^2.

Отв. $S_{\text{сеч}} = \frac{S}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta}{(1-\operatorname{tg}\beta)\sin\varphi} = \frac{S}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(45^\circ-\beta)\sin\varphi}.$

710. Угол между непересекающимися диагоналями BA_1 и AD_1 (черт. 186) равен углу $\varphi = \angle A_1BC_1$ между BA_1 и прямой BC_1, параллельной AD_1. Имеем $\angle CBC_1 = \angle DAD_1 = \alpha$ и $\angle ABA_1 = \beta$. Для определения угла φ находим $A_1C_1^2$ сначала из треугольника A_1BC_1 (по теореме косинусов), а затем из прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ и приравниваем найденные выражения. Получаем

$$BA_1^2 + BC_1^2 - 2 \cdot BA_1 \cdot BC_1 \cdot \cos\varphi = B_1A_1^2 + B_1C_1^2.$$

Отсюда

$$2 \cdot BA_1 \cdot BC_1 \cdot \cos\varphi = (BA_1^2 - B_1A_1^2) + (BC_1^2 - B_1C_1^2) = 2 \cdot BB_1^2.$$

В это равенство подставляем

$$BA_1 = \frac{AA_1}{\sin\beta} = \frac{BB_1}{\sin\beta}$$

(из треугольника BAA_1) и $BC_1 = \dfrac{BB_1}{\sin\alpha}$. Получаем

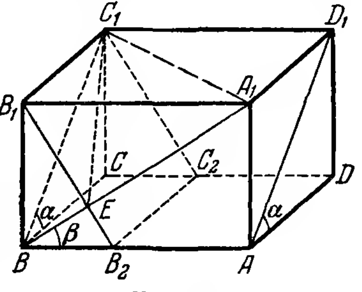
$$\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta.$$

Другой способ. Через ребро B_1C_1 проведём плоскость $B_1C_1C_2B_2$, перпендикулярную к BA_1 (это возможно, так как $B_1C_1 \perp BA_1$). Пусть E — точка пересечения прямых BA_1 и B_1B_2. Из прямоугольного треугольника BC_1E находим $BE = BC_1 \cos\varphi$, а из прямоугольного треугольника BB_1E, где $\angle B_1BE = 90° - \beta$, имеем

$$BE = BB_1 \cdot \cos(90° - \beta) = BB_1 \cdot \sin\beta.$$

Отрезок BB_1 выразим через BC_1 из треугольника BB_1C_1, где $\angle B_1BC_1 = 90° - \alpha$. Получим $BB_1 = BC_1 \cdot \sin\alpha$ и, значит,

$$BE = BC_1 \cdot \sin\alpha\sin\beta.$$



Черт. 186.

Приравнивая два выражения отрезка BE, получаем

$$BC_1 \cdot \cos\varphi = BC_1 \cdot \sin\alpha\sin\beta.$$

Отв. $\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta$.

711. Обозначим двугранные углы при рёбрах SA, SB, SC (черт. 187) через φ_A, φ_B, φ_C. Проведём через какую-либо точку F ребра SC плоскость DFE, перпендикулярную к SF. Тогда $\angle DFE = \varphi_C$. Определяем ED^2 из треугольника EFD и из треугольника ESD, а затем приравниваем полученные выражения. Находим

$$FE^2 + FD^2 - 2 \cdot FE \cdot FD \cdot \cos\varphi_C = SE^2 + SD^2 - 2 \cdot SE \cdot SD \cdot \cos\gamma.$$

Отсюда

$$2 \cdot FE \cdot FD \cdot \cos\varphi_C = 2 \cdot SE \cdot SD \cdot \cos\gamma - (SE^2 - FE^2) - (SD^2 - FD^2),$$

т. е.

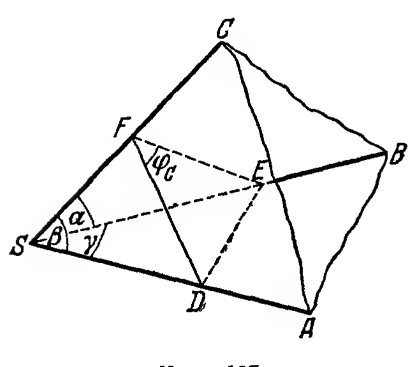
$$2 \cdot FE \cdot FD \cdot \cos\varphi_C = 2 \cdot SE \cdot SD \cdot \cos\gamma - 2 \cdot SF^2.$$

В это равенство подставляем

$$FE = SF \cdot \operatorname{tg}\alpha;$$
$$FD = SF \cdot \operatorname{tg}\beta;$$
$$SE = \frac{SF}{\cos\alpha}$$

и

$$SD = \frac{SF}{\cos\beta}.$$



Черт. 187.

Получаем

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} - 1,$$

откуда

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Аналогично найдём $\cos\varphi_A$ и $\cos\varphi_B$.

Отв. $\cos\varphi_A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$,

$$\cos\varphi_B = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha},$$

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

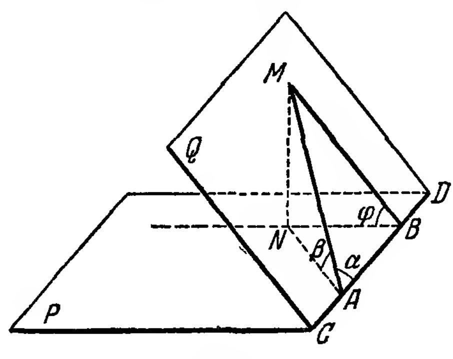
712. Решается как предыдущая задача.

Отв. $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos A$.

713. См. задачу **711**.

Отв. Искомый угол содержит 90°.

714. Пусть точка M лежит на грани Q (черт. 188). По условию прямая AM образует с AB угол α, а прямая MB перпендикулярна к AB. Проведём через BM плоскость MBN, перпендикулярную к ребру, и опустим из точки M на BN



Черт. 188.

перпендикуляр MN. Прямая MN перпендикулярна также и к NA и $\angle MAN = \beta$ (доказать!). Имеем также $\varphi = \angle NBM$. Угол φ мы найдём из треугольника NBM, где $MN = AM \cdot \sin\beta$ (из треугольника ANM) и $BM = AM \cdot \sin\alpha$ (из треугольника AMB). Получаем

$$\sin\varphi = \frac{MN}{BM} = \frac{AM \sin\beta}{AM \sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Отв. $\sin\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

715. На черт. 189 PQ изображает общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым LL' и MM'. Чтобы получить угол, под которым отрезок PQ виден из точки A, нужно провести луч AP; тогда $\angle PAQ = \alpha$. Аналогично $\angle PBQ = \beta$. Проведём через точку P прямую PE, параллельную MM'. Тогда угол между прямыми MM' и LL' есть (по определению) угол $\varphi = \angle EPB$. Опустим из A перпендикуляр AE на прямую PE и проведём AB (все остальные линии, дающие изображение параллелепипеда, рёбрами которого

являются PQ, QA и PB, проведены лишь для наглядности чертежа). Из прямоугольного треугольника BPQ находим

$$PB = PQ \operatorname{ctg} \beta = h \operatorname{ctg} \beta.$$

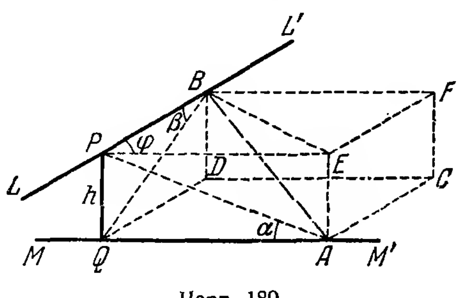
Аналогично

$$PE = QA = h \operatorname{ctg} \alpha.$$

Далее

$$BE^2 = PB^2 + PE^2 - 2 \cdot PB \cdot PE \cos \varphi =$$
$$= h^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \varphi).$$

Прямая AE перпендикулярна к плоскости EPB, так как она параллельна прямой PQ, являющейся общим перпендикуля-



Черт. 189.

ром для прямых PB и PE. Из прямоугольного треугольника AEB находим

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = h^2 + BE^2.$$

Отв. $AB^2 = h^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \varphi)$.

716. Чертёж предыдущей задачи (в настоящей задаче $\varphi = 90°$). Имеем

$$BE = \sqrt{PE^2 + PB^2} = h \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

Угол между прямыми AB и PQ равен углу между AB и прямой AE, параллельной PQ. Обозначив его через γ, имеем

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{BE}{AE} = \frac{h \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}{h}.$$

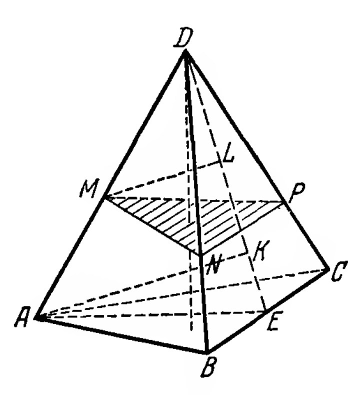
Отв. $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$.

717. Пусть (черт. 190)

$$\frac{DM}{MA}=\frac{m_1}{n_1},\quad \frac{DN}{NB}=\frac{m_2}{n_2},\quad \frac{DP}{PC}=\frac{m_3}{n_3}.$$

Найдём сначала отношение объёма V_1 пирамиды $DMNP$ к объёму V пирамиды $DABC$. Примем грань BDC за основание пирамиды $DABC$ и грань NPD за основание пирамиды $DMNP$. Пусть ребро DA проектируется на плоскость DBC отрезком, лежащим на прямой DE. Тогда точки A и M проектируются в некоторые точки K и L, лежащие на прямой DE. Следовательно, высоты $AK=h$ и $ML=h_1$ лежат в плоскости ADE и треугольники DML и DAK подобны. Значит,

$$\frac{h_1}{h}=\frac{DM}{DA}=$$
$$=\frac{DM}{DM+MA}=\frac{m_1}{m_1+n_1}.$$



Черт. 190.

Площадь S_1 основания NDP относится к площади S основания BDC, как $DN\cdot DP$ к $DB\cdot DC$ (так как треугольники NDP и BDC имеют общий угол D). Значит,

$$\frac{S_1}{S}=\frac{DN}{DB}\cdot\frac{DP}{DC}=\frac{m_2}{m_2+n_2}\cdot\frac{m_3}{m_3+n_3}.$$

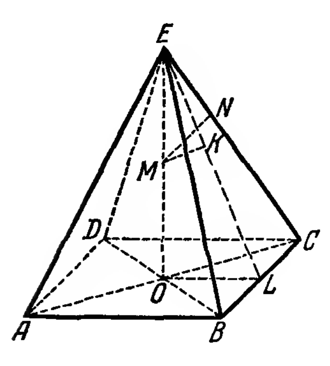
Следовательно,

$$\frac{V_1}{V}=\frac{h_1}{h}\cdot\frac{S_1}{S}=\frac{m_1m_2m_3}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)}.$$

Теперь находим отношение $\frac{V_1}{V-V_1}$, в котором делится объём пирамиды $DABC$.

Отв. $\dfrac{V_1}{V-V_1}=\dfrac{m_1m_2m_3}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-m_1m_2m_3}.$

718. План решения: из подобия треугольников OEL и MEK (черт. 191) выразим OL через $MK=b$ и $ME=\frac{H}{2}$; из подобия треугольников OCE и MEN выразим OC через $MN=h$ и $ME=\frac{H}{2}$. Подставив найденные выражения в соотношение $OC^2=2\cdot OL^2$, получим уравнение, из которого найдём H.



Черт. 191.

Решение. Имеем

$$OL:H=MK:EK,$$

т. е.

$$OL:H=b:\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2-b^2},$$

откуда

$$OL^2=\frac{4b^2H^2}{H^2-4b^2};$$

таким же образом найдём

$$OC^2=\frac{4h^2H^2}{H^2-4h^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{4h^2H^2}{H^2-4h^2}=2\frac{4b^2H^2}{H^2-4b^2}.$$

Деля на H^2, получим после преобразований

$$H=\frac{2bh}{\sqrt{2b^2-h^2}}.$$

Теперь находим

$$OL^2=\frac{4b^2H^2}{H^2-4b^2}=\frac{2b^2h^2}{h^2-b^2}$$

и

$$V=\frac{1}{3}(2OL)^2\cdot H.$$

Отв. $V=\frac{16b^3h^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}.$

ГЛАВА 10

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

719. *Отв.* $V=\frac{\pi l^3}{8\sqrt{3}}$.

720. *Отв.* $V=\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2-c^2}$.

721. *Отв.* $V=\frac{a^3}{4\pi}$.

722. *Отв.* $V=\frac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.

723. Радиус основания $R=l\sin\alpha$ (черт. 192)[1], высота конуса $H=l\cos\alpha$. Объём

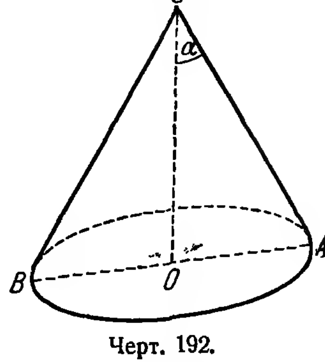
$$V=\frac{\pi R^2H}{3}=\frac{\pi l^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3}.$$

Полная поверхность

$$S_п=\pi R(l+R)=$$
$$=\pi l^2\sin\alpha(1+\sin\alpha).$$

По условию $l+H=m$; следовательно,

$$l=\frac{m}{1+\cos\alpha}=\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$



Черт. 192.

Отв. $V=\frac{\pi m^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$; $S_п=\frac{\pi m^2\sin\alpha\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

724 (черт. 193). Плоскости A_1B_1 и A_2B_2 отделили от конуса ACB конус A_1CB_1 и конус A_2CB_2, подобные данному конусу. Их объёмы (V, V_1 и V_2) относятся, как кубы высот

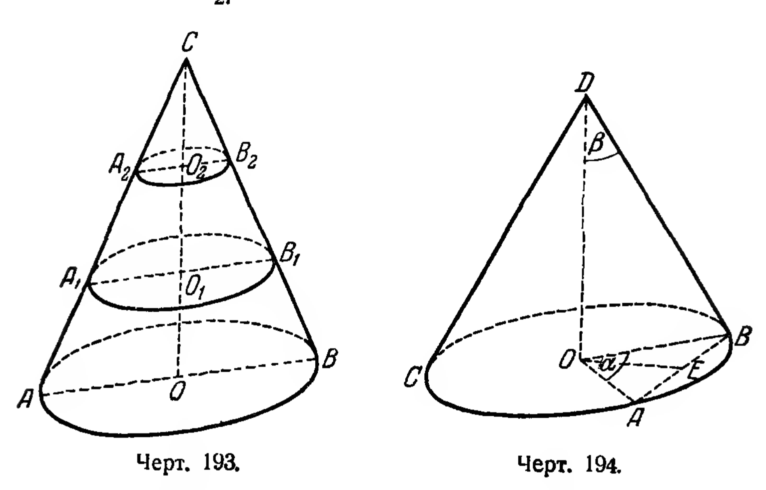
$$\frac{V_1}{V}=\frac{\left(\frac{2}{3}H\right)^3}{H^3} \quad \text{и} \quad \frac{V_2}{V}=\frac{\left(\frac{1}{3}H\right)^3}{H^3}.$$

---

[1]) О вычерчивании эллипса (изображения окружности, лежащей в основании конуса) см. стр. 339.

Объём $V_{ср}$ средней части $A_1A_2B_2B_1$ равна $V_1 - V_2$. Вычитая из первой пропорции вторую, найдём $V_{ср}$.

Отв. $V_{ср} = \frac{7}{27} V$.



Черт. 193. Черт. 194.

725. Из треугольника AOE (черт. 194) находим

$$OA = R = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника OBD имеем $H = R\operatorname{ctg}\beta$.

Отв. $V = \frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

726. По условию $OC - OC_1 = h$ (черт. 195). Имеем

$$OC = R\operatorname{ctg}\beta$$

и

$$OC_1 = R\operatorname{ctg}\alpha.$$

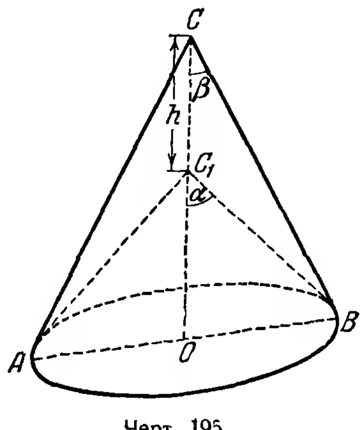
Следовательно,

$$R = \frac{h}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Искомый объём V равен разности объёмов конусов ACB и AC_1B. Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(OC-OC_1)=$$
$$=\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Отв.
$$V=\frac{\pi h^3}{3(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)^2}=$$
$$=\frac{\pi h^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha-\beta)}.$$



Черт. 195.

727. По условию
$$\pi Rl=S.$$

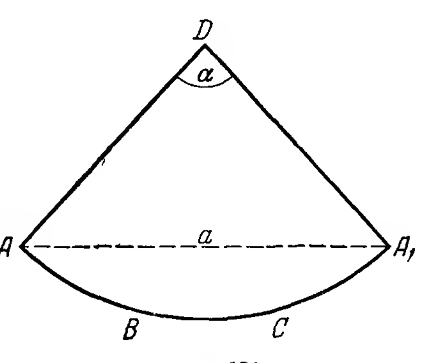
Площадь основания
$$S_{осн}=\pi R^2$$

равна $P-S$. Деля почленно равенство
$$\pi R^2=P-S$$

на равенство
$$\pi Rl=S,$$

получаем $\frac{R}{l}=\frac{P-S}{S}$. Обозначим искомый угол через β; из треугольника OBD (см. черт. 194) имеем
$$\sin\beta=\frac{R}{l}.$$

Отв. $\beta=\arcsin\frac{P-S}{S}$.



Черт. 196.

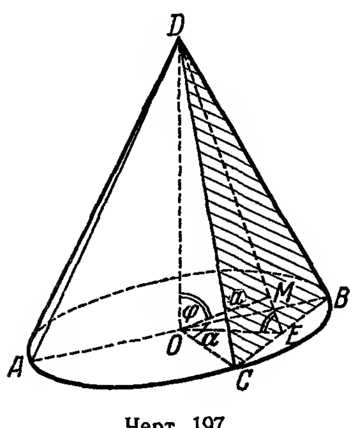
728. Из равнобедренного треугольника ADA_1 (черт. 196) находим $AD=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Если α есть радианная мера угла ADA_1, то

$$\overset{\frown}{ABCA_1}=AD\cdot\alpha=\frac{a\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

До развёртывания боковой поверхности отрезок AD был образующей конуса, так что

$$l = AD = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

дуга $ABCA_1$ была окружностью основания, так что



Черт. 197.

$$2\pi R = \frac{a\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Высота H конуса равна

$$H = \sqrt{l^2 - R^2} = $$
$$= \frac{a}{4\pi\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Отв. $V = \dfrac{\alpha^2 a^3\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{192\pi^2\sin^3\frac{\alpha}{2}}$,

где α — радианная мера данного угла.

729. Угол DOM (черт. 197) равен углу $\varphi = \angle DEO$. Из $\triangle ODM$ и $\triangle OEM$ находим

$$OD = H = \frac{a}{\cos\varphi}$$

и

$$OE = \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Из $\triangle OCE$ находим

$$OC = R = \frac{OE}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

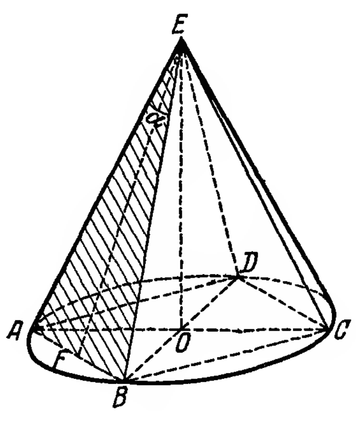
Отв. $V = \dfrac{\pi a^3}{3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

730. Радиус основания конуса $R=\frac{a}{\sqrt{2}}$ (черт. 198). Из $\triangle AEF$ находим $AE=l=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; из $\triangle AOE$ находим

$$H=\sqrt{AE^2-AO^2}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Полная поверхность $S_п$ равна

$$\pi R(l+R)=\frac{\pi a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$



Черт. 198.

Выражение в скобках можно преобразовать:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\alpha}{2}=\sin 45^\circ+\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{90^\circ+\alpha}{4}\cos\frac{90^\circ-\alpha}{4}.$$

Отв. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$;

$$S_п=\frac{\pi a^2\left(1+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi a^2\sin\frac{90^\circ+\alpha}{4}\cos\frac{90^\circ-\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

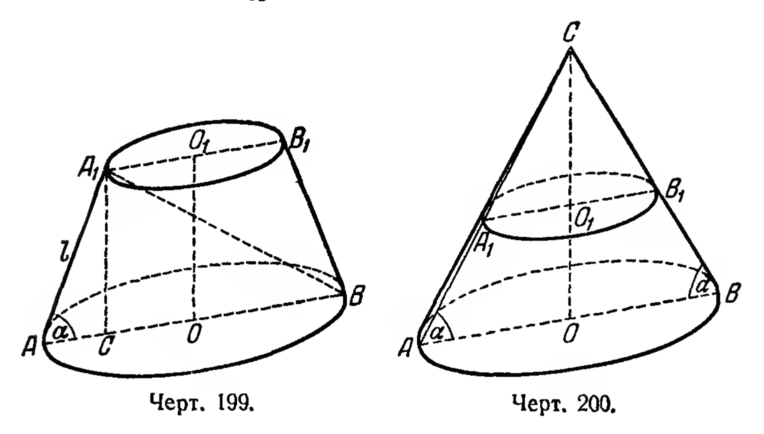
731. Из треугольника AA_1C (черт. 199) имеем $AC = l\cos\alpha$. Из треугольника AA_1B находим $AB = 2R = \frac{l}{\cos\alpha}$, так что $AO = R = \frac{l}{2\cos\alpha}$. Значит,

$$A_1O_1 = r = AO - AC = l\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$$

Теперь находим

$$S_{бок} = \pi l(R + r) = \pi l^2\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$$

Отв. $S_{бок} = \frac{\pi l^2 \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \pi l^2 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha$.



Черт. 199. Черт. 200.

732. Из соотношений $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ и $R = H\operatorname{ctg}\alpha$ получим

$$H = \sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}} \quad \text{и} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{ctg}\alpha}{\pi}}.$$

Пусть требуется разделить пополам боковую поверхность. Так как конусы ABC и A_1B_1C (черт. 200) подобны, то их боковые поверхности S и S_1 относятся, как $H^2 = OC^2$ к $H_1^2 = O_1C^2$. Следовательно,

$$H_1 : H = \sqrt{S_1 : S} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ т. е. } H_1 = \frac{H}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}.$$

Пусть теперь требуется разделить пополам полную поверхность. Тогда

$$\pi R_1 l_1 = \frac{1}{2}\pi(R^2 + Rl).$$

Подставляя сюда $R_1 = H_1 \operatorname{ctg}\alpha$; $l_1 = \frac{H_1}{\sin\alpha}$ и $l = \frac{H}{\sin\alpha}$, получим

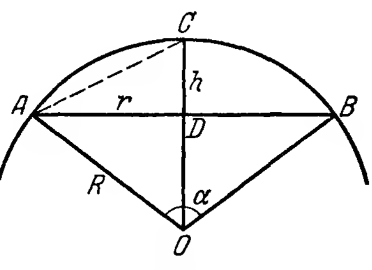
$$\pi H_1^2 \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\pi}{2}\left(H^2\operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{H^2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

откуда $H_1 = H\cos\frac{\alpha}{2}$.

Отв. Если пополам делится боковая поверхность, то $H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$; если полная, то $H_1 = \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$.

733. Обозначим (черт. 201) радиус шара через R, высоту DC сегментной поверхности ACB через h и отрезок DA через r. Объём V сектора равен $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$. Из треугольника ACD, где $\angle CAD = \frac{\alpha}{4}$ (как вписанный, опирающийся на дугу $\breve{BC} = \frac{\alpha}{2}$), находим $h = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$. Из треугольника ADO имеем $r = R\sin\frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$



Черт. 201.

Полная поверхность сектора состоит из поверхности сегмента ACB, равной $2\pi Rh$, и боковой поверхности конуса AOB, равной πrR. Следовательно, $S_п = 2\pi Rh + \pi rR = \pi R(2h + r)$.

Отв. $V = \frac{4\pi}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}$; $S_п = \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} + 1\right)$.

734 (см. черт. 201). При обозначениях предыдущей задачи имеем $S = 2\pi Rh + \pi r^2$. Из $\triangle ADO$ имеем $AO^2 = AD^2 + OD^2$; так как $OD = R - h$, то $R^2 = r^2 + (R-h)^2$ и $r^2 = 2Rh - h^2$. Значит, $S = 4\pi Rh - \pi h^2$.

Отсюда

$$h = 2R \pm \frac{\sqrt{4\pi^2R^2 - \pi S}}{\pi}.$$

Так как $h < R$, то знак «плюс» не годится.

Отв. $h = 2R - \sqrt{4R^2 - \frac{S}{\pi}}$.

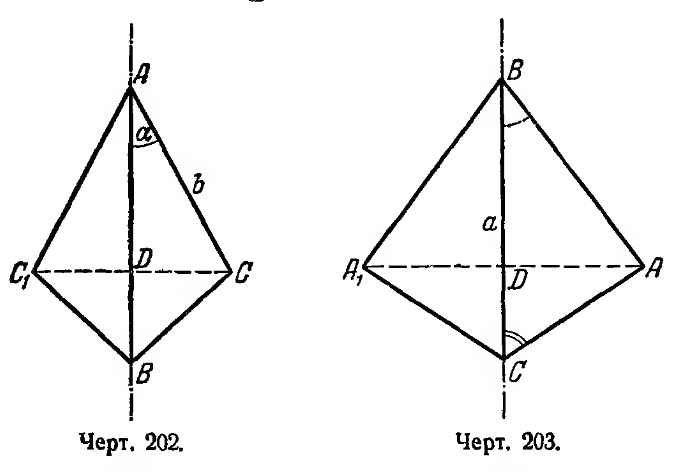
735. На черт. 202 изображено осевое сечение тела, полученного при вращении треугольника ABC около стороны AB. Это тело состоит из двух конусов. Его объём

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot DC^2 \cdot AD + \frac{1}{3}\pi \cdot DC^2 \cdot DB =$$

$$= \frac{\pi}{3} DC^2 (AD + DB) = \frac{\pi}{3} DC^2 \cdot AB.$$

Учтём, что $DC \cdot AB = 2S$ и что $DC = b \sin \alpha$.

Отв. $V = \frac{2\pi Sb \sin \alpha}{3}$.



Черт. 202. Черт. 203.

736. Объём тела вращения (см. предыдущую задачу) будет

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot DA^2 \cdot (BD + DC) = \frac{1}{3}\pi a \cdot DA^2$$

(черт. 203). Для определения DA поступим так. Из тре-

угольника BAD находим $BD = DA \cdot \operatorname{ctg} B$, а из треугольника DAC найдём

$$DC = DA \cdot \operatorname{ctg} C.$$

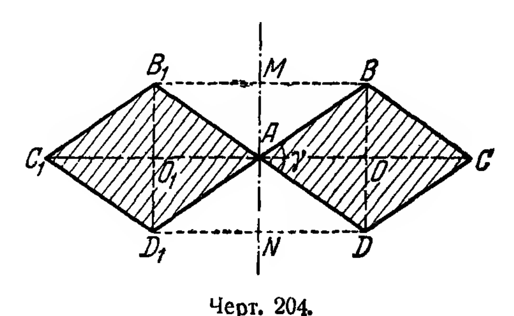
Следовательно,

$$a = BD + DC = DA (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C).$$

Отсюда находим DA.

Отв. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi a^3}{(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)^2} = \frac{\pi a^3 \sin^2 B \sin^2 C}{3 \sin^2 (B + C)}$.

737. Объём тела вращения (сечение его изображено на черт. 204) равен сумме объёмов двух равных усечённых конусов, полученных от вращения трапеций $AMBC$ и $ANDC$,



Черт. 204.

без суммы объёмов двух равных конусов, полученных от вращения треугольников AMB и AND. Радиус одного основания усечённого конуса $AC = d$, а другого $MB = \frac{d}{2}$. Имеем

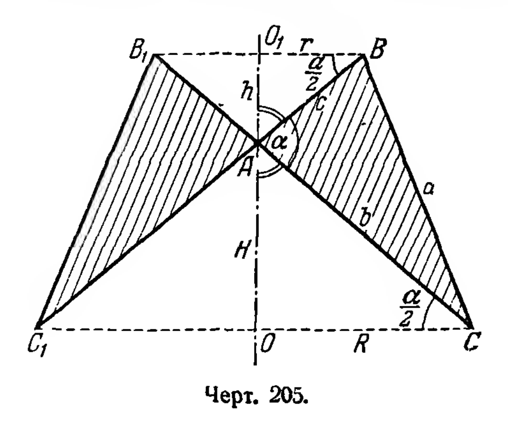
$$V = 2\left[\frac{\pi \cdot BO}{3}\left(d^2 + \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{2}\right) - \frac{\pi \cdot BO}{3} \cdot \frac{d^2}{4}\right] = \pi d^2 \cdot BO.$$

Из $\triangle AOB$ находим

$$BO = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Отв. $V = \frac{\pi d^3 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{2}$.

738. Объём V (черт. 205) тела вращения равен объёму усечённого конуса, полученного от вращения трапеции OO_1BC, без объёма двух конусов, полученных от вращения треугольников AO_1B и AOC.



Черт. 205.

Так как по условию $\angle BAO_1 = \angle CAO$, то $\angle BAO_1 = \angle CAO = 90° - \frac{\alpha}{2}$, так что

$$\angle O_1BA = \angle OCA = \frac{\alpha}{2}.$$

При обозначениях чертежа 205 имеем $H = b\sin\frac{\alpha}{2}$, $R = b\cos\frac{\alpha}{2}$ (из треугольника AOC) и $h = c\sin\frac{\alpha}{2}$, $r = c\cos\frac{\alpha}{2}$ (из треугольника AO_1B). Значит,

$$V = \frac{\pi}{3}(H+h)(R^2+Rr+r^2) - \frac{\pi}{3}HR^2 - \frac{\pi}{3}hr^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}[(b+c)(b^2+bc+c^2) - b^3 - c^3].$$

Отв. $V = \dfrac{\pi bc(b+c)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{3}$.

739. Поверхность S тела вращения (черт. 206) состоит из суммы боковых поверхностей двух равных конусов с осевым сечением DAD_1 и CBC_1 и боковой поверхности цилиндра с осе-

вым сечением CDD_1C_1. При обозначениях чертежа 206 имеем

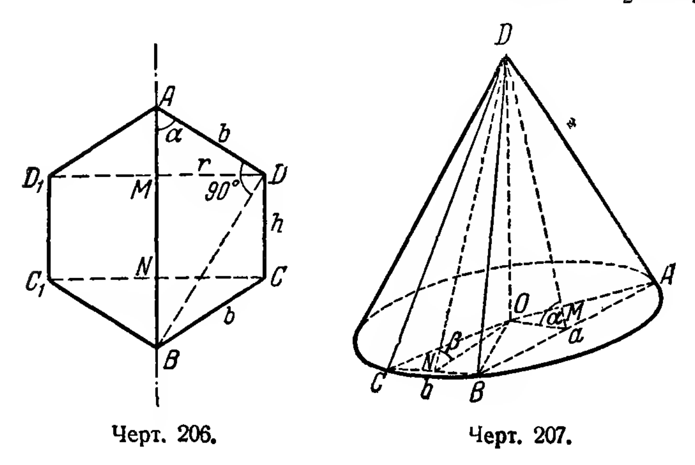
$$r = b\sin\alpha,\ h = MN = AB - 2AM = \frac{b}{\cos\alpha} - 2b\cos\alpha.$$

Значит,

$$S = 2\pi r(b+h) = \frac{2\pi b^2\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha).$$

Отв. $S = 2\pi b^2 \operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha) =$

$$= 4\pi b^2 \operatorname{tg}\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}.$$



Черт. 206. Черт. 207.

740. Вращая данные плоскости вокруг высоты конуса, не изменяя углов α и β, можно привести их в положение (изображённое на черт. 207), чтобы они пересекались друг с другом по общей образующей BD конуса. Из треугольников OBM и OBN находим

$$OB^2 = R^2 = \frac{a^2}{4} + OM^2 = \frac{b^2}{4} + ON^2;$$

здесь $OM = H\operatorname{ctg}\alpha$ и $ON = H\operatorname{ctg}\beta$. Следовательно,

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + H^2\operatorname{ctg}^2\alpha \quad \text{и} \quad \frac{a^2}{4} + H^2\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{b^2}{4} + H^2\operatorname{ctg}^2\beta.$$

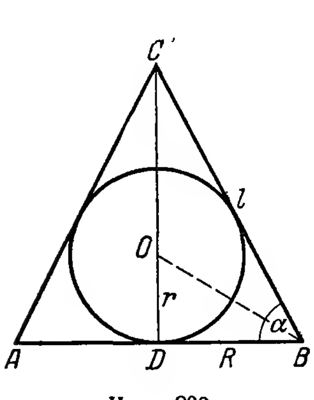
Из этих уравнений находим H и R.

Отв. $V = \dfrac{\pi(b^2\operatorname{ctg}^2\alpha - a^2\operatorname{ctg}^2\beta)\sqrt{b^2 - a^2}}{24(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta)^{3/2}}.$

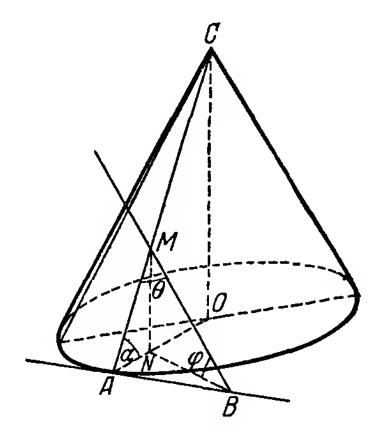
741. На черт. 208 изображено осевое сечение конуса. В пересечении с шаром радиуса r оно даёт окружность радиуса $OD = r$, вписанную в треугольник ABC. Имеем

$$r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Отв. $V = \dfrac{4\pi l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \dfrac{\alpha}{2}}{3}$.



Черт. 208.



Черт. 209.

742. Через точку M (черт. 209) боковой поверхности конуса проведена касательная прямая MB, составляющая с образующей CMA угол $\theta = \angle BMA$. Известен ещё угол $\alpha = \angle OAM$; требуется найти угол φ, образуемый прямой MB с плоскостью P основания конуса.

Прямая MB, касающаяся конуса, пересекает плоскость в некоторой точке B, лежащей на касательной AB к окружности основания[1]). Опустив из точки M перпендикуляр MN на радиус OA, получим проекцию BN прямой BM на плоскость P. Значит, $\varphi = \angle NBM$. Из $\triangle AMN$ имеем $AM = \dfrac{MN}{\sin \alpha}$; из $\triangle MAB$ имеем $MB = \dfrac{AM}{\cos \theta} = \dfrac{MN}{\sin \alpha \cos \theta}$; из $\triangle MNB$

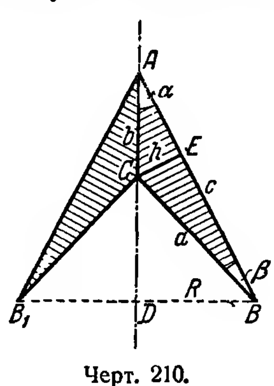
[1]) Это можно доказать лишь на основе определения касательной к боковой поверхности конуса. Но такого определения в элементарной геометрии не даётся.

находим

$$\sin\varphi = \frac{MN}{MB} = \sin\alpha\cos\theta.$$

Отв. $\varphi = \arcsin(\sin\alpha\cos\theta)$.

743. Поверхность S тела вращения равна сумме боковых поверхностей двух конусов с осевыми сечениями BAB_1 и



Черт. 210.

BCB_1. При обозначениях чертежа 210 имеем $S = \pi Rc + \pi Ra$. Из $\triangle CBE$ имеем

$$a = \frac{h}{\sin\beta};$$

по теореме синусов имеем $\frac{c}{\sin[180° - (\alpha+\beta)]} = \frac{a}{\sin\alpha}$; отсюда

$$c = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

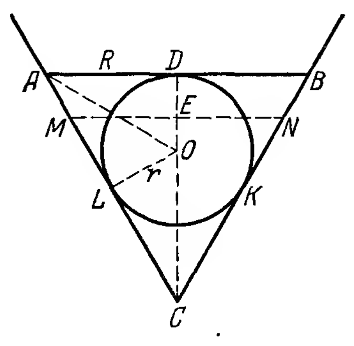
Из $\triangle BCD$, где $\angle BCD = \alpha+\beta$, имеем $R = a\sin(\alpha+\beta)$. Значит,

$$S = \frac{\pi h^2 \sin(\alpha+\beta)[\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha]}{\sin^2\beta\sin\alpha}.$$

Выражение в квадратных скобках можно преобразовать по формуле суммы синусов.

Отв. $S = \dfrac{2\pi h^2\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\sin^2\beta}$.

744. На черт. 211 изображено осевое сечение конического сосуда; ADB — уровень воды. Треугольник ABC — равносторонний; круг DKL (большой круг шара) вписан в него. При обозначениях чертежа 211 $R = OD \cdot \operatorname{tg} 60° = r\sqrt{3}$



Черт. 211.

и $H = CD = 3r$[1]). Объём V воды в сосуде равен объёму конуса ABC без объёма шара, т. е.

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2H - 4r^3) = \frac{5}{3}\pi r^3.$$

Когда шар будет вынут, вода опустится до некоторого уровня MN и заполнит конус MNC. Пусть $CE = h$. Тогда $ME = CE \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{h}{\sqrt{3}}$, так что

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot ME^2 \cdot CE = \frac{\pi h^3}{9}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{\pi h^3}{9} = \frac{5}{3}\pi r^3.$$

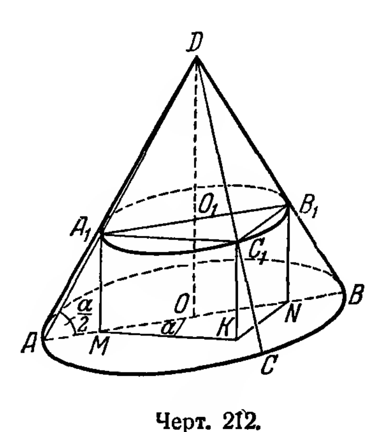
Отв. $h = r\sqrt[3]{15}$.

---

[1]) Радиус круга, вписанного в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты этого треугольника; это следует из того, что точка пересечений медиан каждого треугольника делит каждую медиану в отношении 1 : 2.

745. Если радиус O_1A_1 (черт. 212) обозначить через r, то высота A_1M призмы тоже равна r, а из треугольника $A_1B_1C_1$, где $A_1B_1 = 2r$, имеем

$$A_1C_1 = 2r\cos\alpha \text{ и } B_1C_1 = 2r\sin\alpha.$$



Черт. 212.

Величину r найдём из треугольника AA_1M, где $AM = R - r$. Имеем $R - r = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Отсюда

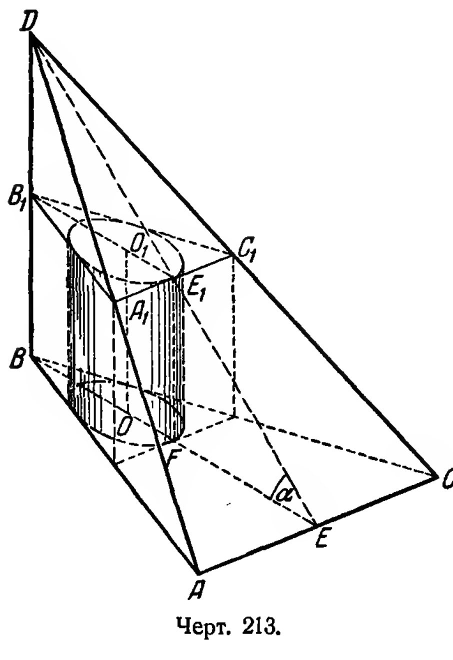
$$r = \frac{R}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь находим боковую поверхность призмы:

$$S_{\text{бок}} = (2r + 2r\cos\alpha + 2r\sin\alpha)\cdot r = \frac{2R^2}{\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}(1+\cos\alpha+\sin\alpha).$$

Отв. $S_{\text{бок}} = \dfrac{2R^2(1+\cos\alpha+\sin\alpha)}{\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$

746. Радиус $R = OF$ (черт. 213) цилиндра равен $\frac{1}{3} BF$[1]). Но



Черт. 213.

$$BF = BE - FE = BE - FE_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{2} (\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{a \sin(\alpha - 30^\circ)}{2 \sin \alpha \sin 30^\circ} = \frac{a \sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin \alpha}.$$

Поэтому объём цилиндра

$$V_1 = \pi \cdot OF^2 \cdot FE_1 = \pi \left[\frac{a \sin(\alpha - 30^\circ)}{3 \sin \alpha}\right]^2 \frac{a}{2}.$$

Объём V_2 пирамиды $DA_1B_1C_1$ равен

$$V_2 = \frac{1}{3} \frac{A_1C_1}{2} \cdot B_1E_1 \cdot B_1D.$$

Здесь

$$B_1E_1 = FB = \frac{a \sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin \alpha} \text{ и } B_1D = B_1E_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha; \; B_1E_1 = \frac{A_1C_1 \cdot \sqrt{3}}{2};$$

отсюда

$$\frac{A_1C_1}{2} = \frac{B_1E_1}{\sqrt{3}}, \quad V_2 = \frac{B_1E_1^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{3}}.$$

Задача возможна при условии, что $BE > FE$, т. е. при условии $\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ или $\operatorname{ctg} 30^\circ > \operatorname{ctg} \alpha$; следовательно, $\alpha > 30^\circ$.

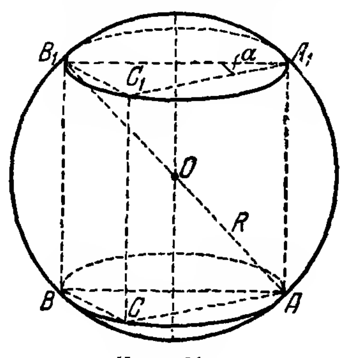
Отв. $V_1 = \frac{\pi a^3 \sin^2(\alpha - 30^\circ)}{18 \sin^2 \alpha}$; $V_2 = \frac{a^3 \sin^3(\alpha - 30^\circ) \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{3} \sin^3 \alpha}$.

---

1) См. сноску на стр. 444.

Предварительное замечание к задаче 747 и следующим

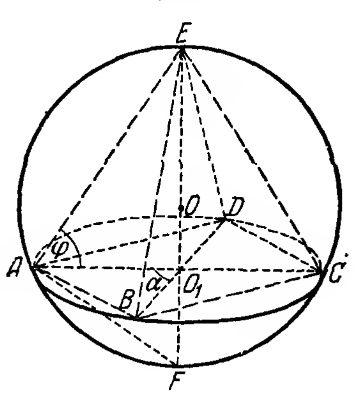
Способы правильного изображения шара с его сечениями, а также различных тел, вписанных в шар и описанных около него, сложны. Поэтому составители сочли возможным ограничиться схематическими чертежами, которые по возможности были бы наглядными и вместе с тем доступными для построения при самостоятельном выполнении чертежа учащимся. В тех случаях, когда схематический чертёж не обладает достаточной наглядностью, даны параллельные объёмные рисунки.



Черт. 214.

747. Плоскости оснований (BAC и $B_1A_1C_1$ на черт. 214) призмы пересекают шар по окружностям. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в эти окружности. Поэтому гипотенузы AB и A_1B_1 являются диаметрами окружностей. Плоскость ABB_1A_1 проходит через центр шара. Так как по условию ABB_1A_1 есть квадрат, то $H = AA_1 = R\sqrt{2}$ и $AB = R\sqrt{2}$.

Отв. $V = \frac{R^3 \sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.



Черт. 215.

748. Плоскость основания пирамиды пересекает шар по кругу $ABCD$ (черт. 215), описанному около основания. Высота пирамиды пройдёт через центр O_1 этого круга (так как все рёбра наклонены к основанию под равными углами), а также через центр O шара. Плоскость, проведённая через диагональ основания AC и вершину E, пересечёт шар по большому кругу, описанному около диагонального сечения пирамиды

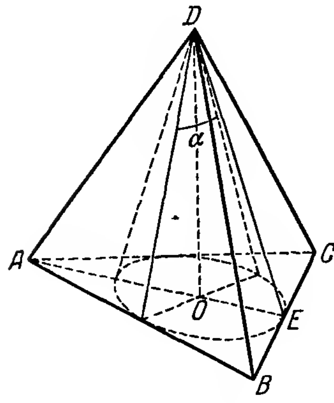
AEC. Из $\triangle AEC$, где угол AEC равен $180° - 2\varphi$, находим по теореме синусов $AC = 2R\sin(180° - 2\varphi) = 2R\sin 2\varphi$; значит, $AO_1 = R\sin 2\varphi$. Из $\triangle AEO_1$ найдём высоту пирамиды

$$EO_1 = H = AO_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi = R\sin 2\varphi \operatorname{tg}\varphi.$$

Отв. $V = \frac{2}{3}R^3 \sin^3 2\varphi \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi$.

749. Так как радиус OE (черт. 216) окружности, вписанной в основание, равен R, то $AB = 2R\sqrt{3}$. Из $\triangle DOE$ находим $DO = H = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Отв. $V = \sqrt{3}R^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.



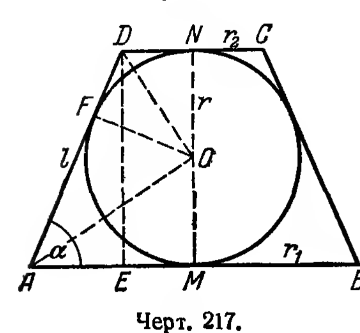
Черт. 216.

750. На черт. 217 изображено осевое сечение. Имеем

$$S_{бок} = \pi l(r_1 + r_2) = = \pi \cdot AD \cdot (AM + DN).$$

Но $AM + DN = AF + DF = AD$. Поэтому $S_{бок} = \pi \cdot AD^2$. Из треугольника AED, где $DE = MN = 2r$, находим $AD = \frac{2r}{\sin\alpha}$.

Отв. $S_{бок} = \frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$.



Черт. 217.

751. См. предыдущую задачу. Имеем $S_п = S_{бок} + \pi(r_1^2 + r_2^2)$. Из треугольника AOM (см. черт. 217) находим

$$AM = r_1 = = OM \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника DON, где $\angle ODN = \frac{180° - \alpha}{2}$, имеем

$$DN = r_2 = r\operatorname{ctg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Вычисления упростятся, если выражение $r_1^2+r_2^2$ преобразовать так: $r_1^2+r_2^2=(r_1+r_2)^2-2r_1r_2$. Так как $r_1+r_2=l$ и $S_{бок}=\pi l^2$ (см. предыдущую задачу) и из прямоугольного треугольника AOD имеем $AF\cdot FD=OF^2$ или $r_1r_2=r^2$, то

$$S_п=\pi l^2+\pi l^2-2\pi r^2=2\pi(l^2-r^2).$$

Сюда подставим $l=\frac{2r}{\sin\alpha}$.

Отв. $S_п=2\pi r^2\left(\frac{4}{\sin^2\alpha}-1\right)$.

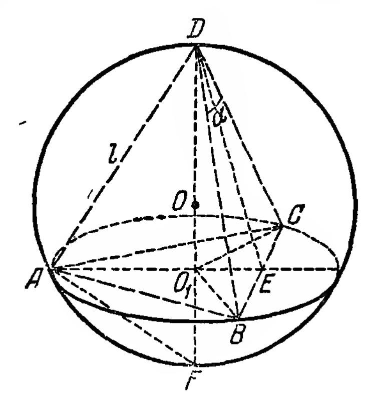
752. См. предыдущую задачу. Имеем

$$V=\pi\cdot\frac{2r}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\frac{2\pi r}{3}[(r_1+r_2)^2-r_1r_2]=$$
$$=\frac{2\pi r}{3}(l^2-r^2).$$

Сюда подставляем $l=\frac{2r}{\sin\alpha}$.

Отв. $V=\frac{2\pi r^3}{3}\left(\frac{4}{\sin^2\alpha}-1\right)$.

753. Обозначим длину равных хорд DA, DB, DC (черт. 218) через l. Из равнобедренного треугольника DBC находим $BC=2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Так же найдём, что $AB=AC=2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, треугольник ABC — равносторонний.



Черт. 218.

Опустив перпендикуляр DO_1 на плоскость ABC и установив равенство треугольников DO_1A, DO_1B, DO_1C, докажем, что $AO_1=BO_1=CO_1$, т. е. что O_1 есть центр основания (так что пирамида $DABC$ — правильная). Так как точки A, B, C лежат на поверхности шара, то $OA=OB=OC$ (O — центр шара). Опустив перпендикуляр из O на плоскость ABC, докажем, что основание перпендикуляра есть центр треугольника ABC, т. е. совпадает с точкой O_1. Следовательно, OO_1 (и значит, DO_1) лежит

на диаметре шара (DF на черт. 218). Из прямоугольного треугольника DAF, где $DF=2R$, находим $l^2=DA^2=2R\cdot DO_1$. Отрезок DO_1 можно связать с l ещё одним соотношением. Именно,

$$DO_1=\sqrt{AD^2-AO_1^2},$$

где

$$AD=l,\ \text{а}\ AO_1=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Значит,

$$DO_1=l\sqrt{1-\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Подставляем это выражение в равенство $l^2=2R\cdot DO_1$. Найдём

$$l=2R\sqrt{1-\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Преобразуем это выражение к виду, удобному для логарифмирования. Имеем

$$l=2R\sqrt{1-\frac{2(1-\cos\alpha)}{3}}=\frac{2R}{\sqrt{3}}\sqrt{1+2\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2R}{\sqrt{3}}\sqrt{2(\cos 60^\circ+\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отв. $l=2R\sqrt{1-\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}=$
$$=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

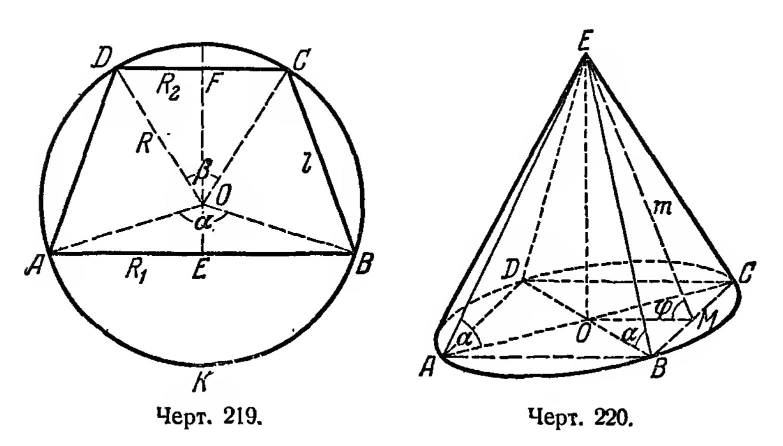
754. Равнобочная трапеция $ABCD$ (черт. 219) изображает осевое сечение усечённого конуса. По условию $\angle AOB=\alpha$ и $\angle DOC=\beta$. Поэтому

$$R_1=AE=AO\sin\frac{\alpha}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}\ \text{и}\ R_2=DF=R\sin\frac{\beta}{2}.$$

Угол AOD равен $\frac{360° - (\alpha + \beta)}{2} = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Поэтому $l = AD = 2R\cos\frac{\alpha + \beta}{4}$. Имеем

$$S_{бок} = \pi l(R_1 + R_2) = 2\pi R^2 \cos\frac{\alpha + \beta}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Отв. $S_{бок} = 2\pi R^2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{4}$.



Черт. 219. Черт. 220.

755. Высота пирамиды (черт. 220) $EO = H = m \sin\varphi$. Из треугольника EAO находим

$$AO = R = H \operatorname{ctg}\alpha = m \sin\varphi \operatorname{ctg}\alpha$$

и

$$AE = l = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{m\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

Получаем

$$S_п = \pi R(l + R) = \pi m \sin\varphi \operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{m\sin\varphi}{\sin\alpha} + m\sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha\right).$$

Полученную формулу можно упростить, применив формулу $\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Отв. $S_п = \pi m^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi$.

756. Из $\triangle ASB$ (черт. 221) находим $AB = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$; следовательно, $R = OA = AB = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$. Из $\triangle ASO$ находим

$$SO = H = \sqrt{l^2 - R^2} = l\sqrt{1 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

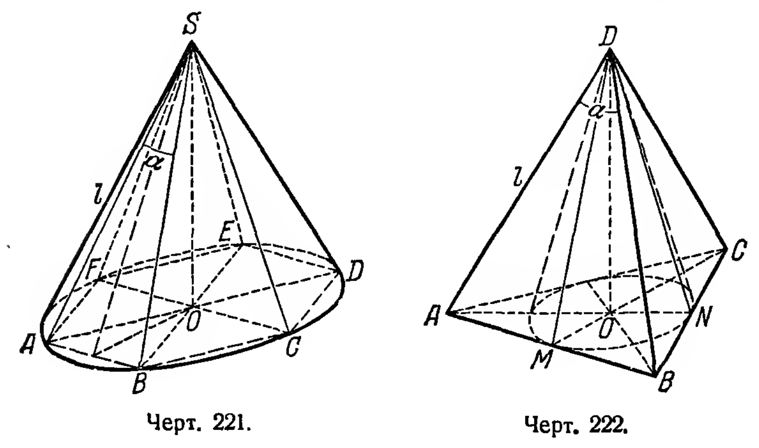
Получаем

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot 4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot l\sqrt{1 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Подкоренное выражение можно преобразовать к виду, удобному для логарифмирования, как в задаче **753**; получим

$$1 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Отв. $V = \frac{8}{3}\pi l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$



Черт. 221. Черт. 222.

757. Из $\triangle ADM$ (черт. 222) находим $AM = l \sin \frac{\alpha}{2}$. Из $\triangle AMO$ находим

$$r = OM = AM \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = l \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и

$$R = AO = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{2l \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Из $\triangle AOD$ находим

$$OD = H = \sqrt{l^2 - R^2} = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Объём V конуса равен

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{3} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

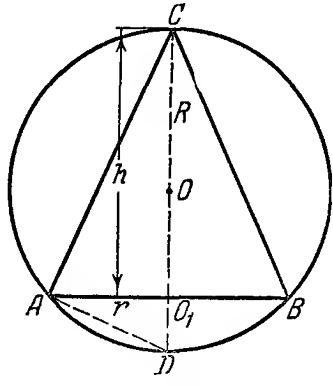
Выражение под корнем можно преобразовать, как в задаче **753**.

Отв. $V = \dfrac{\pi l^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{9\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{2\pi l^3 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{9\sqrt{3}}.$$

758. При обозначениях черт. 223 объём шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, а объём конуса ACB равен $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot CO_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H$. По условию

$$\frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$



Черт. 223.

т. е. $r^2 H = R^3$. Ещё одну зависимость между r и R мы получим из прямоугольного треугольника CAD; именно, $AO_1{}^2 = CO_1 \cdot DO_1$, т. е. $r^2 = H(2R - H)$. Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим $R^3 - 2H^2R + H^3 = 0$. Хотя это уравнение третьей степени относительно неизвестного R, но одно его решение $R = H$ сразу усматривается (его можно было угадать и непосредственно по условию, так как конус, у которого радиус основания и высота равны радиусу шара, составляет по объёму $\frac{1}{4}$ шара). Следовательно (по теореме Безу), левую часть можно разложить на множители, один из которых равен $R - H$. Для этого достаточно разделить $R^3 - 2H^2R + H^3$

на $R-H$ или применить такое преобразование:

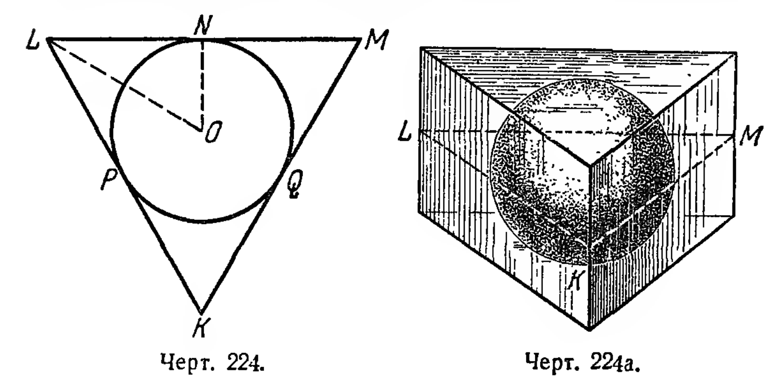
$$R^3-2H^2R+H^3=(R^3-H^2R)-(H^2R-H^3)=$$
$$=R(R-H)(R+H)-H^2(R-H)=(R-H)(R^2+RH-H^2)=0.$$

Уравнение $R^2+RH-H^2=0$ имеет один положительный корень $R=\frac{H(\sqrt{5}-1)}{2}$ (отрицательный корень $R=-\frac{H(\sqrt{5}+1)}{2}$ не годится). Геометрически это означает, что радиус шара равен большей части высоты конуса, разделённой в крайнем и среднем отношении.

Отв. Задача имеет два решения:

$$V=\frac{4}{3}\pi H^3 \text{ и } V=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5}-2)H^3.$$

759. Высота призмы равна диаметру $2R$ вписанного шара. Если через центр O шара провести плоскость, параллельную



Черт. 224. Черт. 224а.

основаниям призмы, то в сечении призмы получим равносторонний треугольник KLM (черт. 224)[1], равный основанию призмы, а в сечении шара — большой круг PNQ, вписанный в треугольник KLM. Из треугольника LON, где $ON=R$ и $\angle NLO=30°$, найдём $LN=R\sqrt{3}$. Следовательно, $LM=a=$

---

[1]) Для наглядности рядом с черт. 224 помещаем рисунок 224а — наглядное изображение рассматриваемого тела. Такие «параллельные» рисунки будут даны и в некоторых следующих задачах. Выполнение их учащимися не обязательно, хотя и очень полезно.

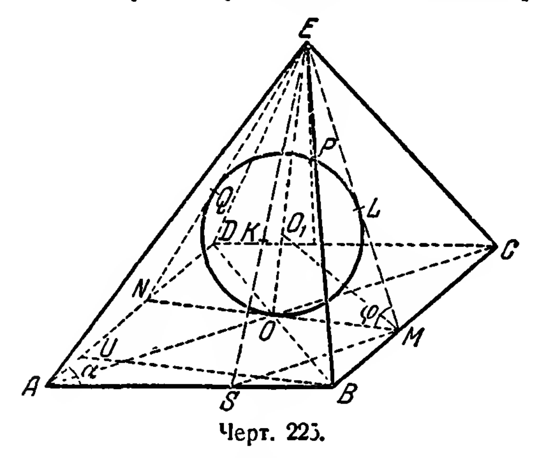
$=2R\sqrt{3}$. Боковая поверхность $S_{бок}$ призмы равна $S_{бок}=3aH=$ $=12R^2\sqrt{3}$. Площадь основания $S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3R^2\sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_п=12R^2\sqrt{3}+6R^2\sqrt{3}=18R^2\sqrt{3}.$$

Поверхность же шара равна $4\pi R^2$.

Отв. Искомое отношение равно $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

760. а) Способ изображения. Центр O_1 шара, вписанного в пирамиду (если в эту пирамиду можно вписать шар), должен отстоять на равных расстояниях от боковой грани BEC



Черт. 225.

и от основания $ABCD$ (черт. 225). Поэтому он должен лежать на биссекторной плоскости двугранного угла φ при ребре BC. Точно так же O_1 лежит на биссекторных плоскостях двугранных углов φ при рёбрах AB, AD, DC. Значит, все боковые грани пирамиды O_1ABCD (не изображённой на чертеже) наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом $\frac{\varphi}{2}$. Следовательно, высота O_1O пирамиды O_1ABCD проходит через центр O окружности, вписанной в ромб $ABCD$ (см. на стр. 342 замечание к задаче **617**). Через тот же центр проходит высота EO данной пирамиды. Значит, центр O_1 шара лежит на высоте EO.

Точка касания шара с плоскостью грани BEC есть основание L перпендикуляра, опущенного из центра O_1 шара на плоскость BEC. Отсюда следует, что плоскость O_1EL перпендикулярна к грани BEC (доказать!). Вместе с тем плоскость O_1EL перпендикулярна к плоскости основания $ABCD$ (так как проходит через высоту EO). Следовательно, плоскость O_1EL перпендикулярна к ребру BC. Значит, прямая MN, по которой пересекаются плоскости O_1EL и $ABCD$, есть высота ромба (проведённая через его центр O). То же имеет место для остальных трёх точек касания с боковыми гранями (K, Q и P).

Отсюда вытекает следующее построение. Изображаем высоту NOM ромба $ABCD$ (желательно, чтобы она была горизонтальной), строим сечение NEM (равнобедренный треугольник) и изображаем окружность, вписанную в треугольник NEM. Точки L и Q, в которых эта окружность коснётся сторон ME и NE, будут точками касания шара с гранями BEC и AED. Чтобы изобразить точку K, проведём $MS \parallel AC$. Тогда прямая OS (не показанная на чертеже) изображает другую высоту ромба (доказать!). Проводим прямую ES и через точку L проводим (не изображённую) прямую $LK \parallel MS$. Четвёртая точка P строится аналогично. Из этого построения следует, что шар с центром O_1 и радиусом $R = O_1L$ действительно вписан в пирамиду.

б) Р е ш е н и е. Из треугольника MOO_1 находим

$$OM = OO_1 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

так что

$$H = OE = OM \cdot \operatorname{tg} \varphi = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Далее из треугольника BUA (где $BU \parallel MN$), находим

$$AB = a = \frac{BU}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot OM}{\sin \alpha} = \frac{2R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sin \alpha}.$$

Значит,

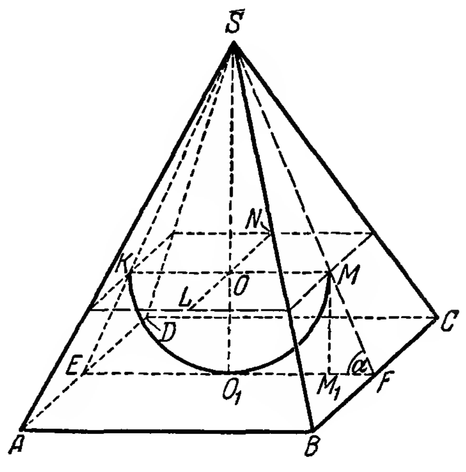
$$S_{осн} = a^2 \sin \alpha = \frac{4R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin \alpha}.$$

Отв. $V = \dfrac{4R^3 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2}}{3 \sin \alpha}$.

761. а) Способ изображения. Центр O экватора полушара (т. е. круга, ограничивающего полушар; черт. 226)[1]) лежит на высоте SO_1 пирамиды. Так как

$$OM = OO_1 = r,$$

то точка M лежит на биссектрисе O_1M угла OO_1M_1. Отметив точку M как пересечение O_1M с SF, изображаем сечение $KLMN$, параллельное основанию. Середины K, L, M, N сторон сечения являются точками касания экватора с боковыми гранями. Полукруг KO_1M есть сечение полушара плоскостью ESF.



Черт. 226.

б) Решение. Сторона основания a равна

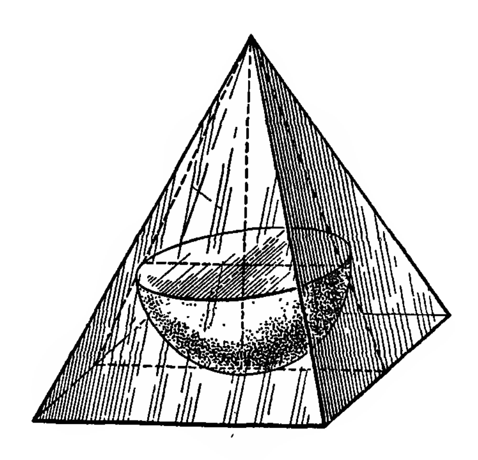
$$a = EF = 2 \cdot O_1F = 2(O_1M_1 + M_1F).$$

Но $O_1M_1 = OM = r$, а $M_1F = MM_1 \cdot \text{ctg}\,\alpha = r\,\text{ctg}\,\alpha$. Значит,

$$a = 2r(1 + \text{ctg}\,\alpha).$$

Имеем

$$S_п = \frac{2S_{осн} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$


Черт. 226а.

---

[1]) См. сноску на стр. 454.

(см. указание к задаче 619). Здесь $S_{осн} = a^2 = 4r^2(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

$$\textit{Отв.}\quad S_п = \frac{8r^2(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{4r^2\sin^2(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

762. Плоскость ESF (черт. 227)[1]) даёт в пересечении с полушаром полукруг NPM, касающийся апофем пирамиды (в точках Q и G). Если обозначим сторону основания пирамиды через a, а радиус полушара — через r, то полная поверхность полушара S_1 будет

$$S_1 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2,$$

а полная поверхность пирамиды

$$S_2 = \frac{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

(см. указание к задаче 619); их отношение

$$q = \frac{3\pi r^2\cos\alpha}{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Из $\triangle OGF$ имеем $OG = OF\cdot\sin\alpha$, т. е. $r = \frac{a}{2}\sin\alpha$. Это выражение подставим в предыдущее равенство.

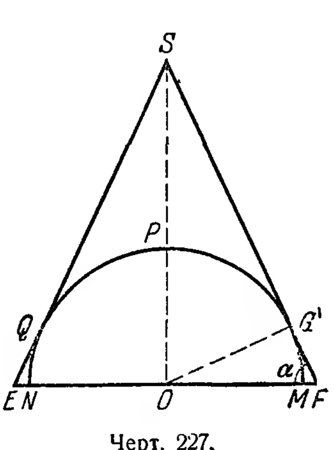
Для вычисления объёма полушара V найдём r из условия $a - 2r = m$ и ранее найденного равенства $r = \frac{a}{2}\sin\alpha$. Получим

$$r = \frac{m\sin\alpha}{2(1-\sin\alpha)} = \frac{m\sin\alpha}{4\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

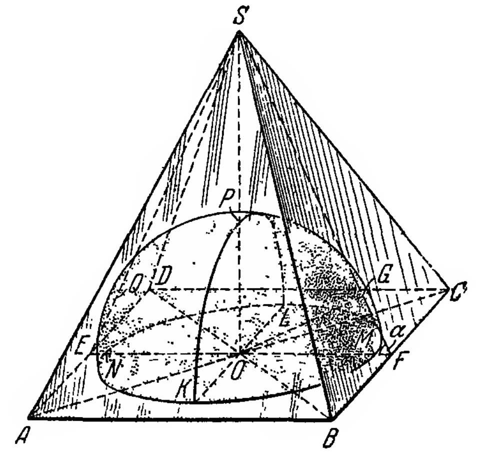
$$\textit{Отв.}\quad q = \frac{3\pi}{8}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\quad V = \frac{\pi m^3\sin^3\alpha}{96\sin^6\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

---

[1]) См. сноску на стр. 454.

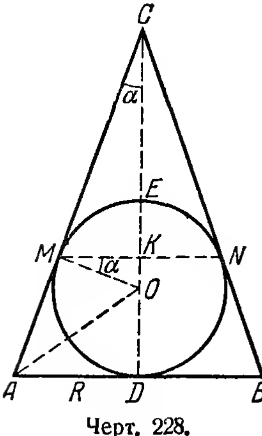


Черт. 227.



Черт. 227а.

763. На черт. 228 изображено осевое сечение конуса и вписанного в него шара. Искомый объём V получается вычитанием объёма шарового сегмента MEN из объёма конуса MCN. Следовательно,



Черт. 228.

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot MK^2 \cdot KC - \pi \cdot KE^2\left(r - \frac{1}{3}KE\right),$$

где r есть радиус шара. Из треугольника AOD находим

$$r = OD = AD \cdot \operatorname{tg}\frac{\angle DAC}{2} = R\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Теперь из треугольника OMK, где $\angle OMK = \alpha$ (стороны углов OMK и MCK взаимно перпендикулярны) имеем

$$MK = OM \cdot \cos\alpha = r\cos\alpha \quad \text{и} \quad OK = r\sin\alpha.$$

Значит, $KE = OE - OK = r(1 - \sin\alpha)$. Наконец,

$$KC = MK \cdot \operatorname{ctg}\alpha = r\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно,

$$V = \frac{\pi}{3}r^3\cos^3\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \pi r^2(1 - \sin\alpha)^2\left[r - \frac{r(1 - \sin\alpha)}{3}\right] = \frac{\pi}{3}r^3\left[\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha} - (1 - \sin\alpha)^2(2 + \sin\alpha)\right].$$

Это выражение можно упростить. Вынесем за скобки $(1 - \sin\alpha)^2$, предварительно преобразовав $\cos^4\alpha$; именно,

$$\cos^4\alpha = (1 - \sin^2\alpha)^2 = (1 - \sin\alpha)^2(1 + \sin\alpha)^2.$$

Теперь имеем

$$V = \frac{\pi r^3(1 - \sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}[(1 + \sin\alpha)^2 - (2 + \sin\alpha)\sin\alpha].$$

Выражение в квадратных скобках равно единице. Получаем

$$V = \frac{\pi r^3(1 - \sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}.$$

Сюда подставляем найденное выражение

$$r = R\,\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Кроме того, можно использовать формулу $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Отв. $V = \dfrac{4\pi R^3\,\mathrm{tg}^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin^4\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha}$.

764. При обозначениях черт. 229 условие задачи выражается равенством $\pi R(l + R) = n\cdot 4\pi r^2$. Из треугольника OBO_1 находим $r = R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, а из треугольника BOC имеем $BC = l = \frac{R}{\cos\alpha}$. Предыдущее равенство по сокращении на πR^2 примет вид

$$1 + \frac{1}{\cos\alpha} = 4n\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Применим формулу

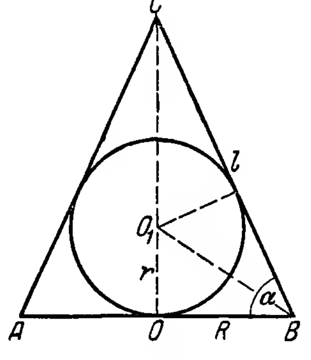
$$\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Будем иметь уравнение

$$\frac{2}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 4n\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Положив $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = z$, получим[1])

$$z^4 - z^2 + \frac{1}{2n} = 0,$$



Черт. 229.

откуда

$$z^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}.$$

Отсюда видно, что при $n < 2$ задача не имеет решения (под корнем отрицательное число). При $n \geqslant 2$ оба значения

[1]) Освобождаясь от знаменателя, мы могли бы внести лишнее решение $\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = 1\right)$, но такого решения мы не получаем: оно не удовлетворяет исходному уравнению.

величины z^2 положительны $\left(\text{ибо } \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\sqrt{\frac{1}{4}}\right.$, т. е. $\left.\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{2}\right)$. Так как величина $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ должна быть положительной, то можем иметь только два решения:

$$z=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}}$$

и

$$z=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}}.$$

Так как угол $\frac{\alpha}{2}$ меньше 45°, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ должен быть меньше единицы; значит, должно быть $z^2<1$. Но это неравенство всегда соблюдено, ибо

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

и

$$\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{2}.$$

Отв. Задача имеет решение только при $n \geqslant 2$. При $n>2$ имеем два решения:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}};$$

при $n=2$ оба решения совпадают $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

765. При обозначениях чертежа 229 имеем

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H=n\cdot\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Подставляя сюда

$$r=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad H=R\operatorname{tg}\alpha,$$

получим уравнение

$$\operatorname{tg}\alpha=4n\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Применив формулу

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

и обозначив $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через z, получим уравнение

$$z\left(\frac{1}{1-z^2}-2nz^2\right)=0.$$

Оно распадается на два, но одно из них ($z=0$) не согласуется с условием (угол α не может равняться нулю). Другое уравнение приводится к виду $z^4-z^2+\frac{1}{2n}=0$, т. е. совпадает с уравнением предыдущей задачи. Получаем два решения:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}}.$$

При $n=4$ одно решение будет

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{8}}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}=\cos 22^\circ 30'\approx 0{,}9239;$$

другое даёт

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin 22^\circ 30'\approx 0{,}3827$$

(отсюда $\alpha_1\approx 85^\circ 28'$ и $\alpha_2\approx 41^\circ 53'$).

Отв. Тот же, что в предыдущей задаче.

При $n=4$ имеем $\alpha_1=2\operatorname{arc\,tg}(\cos 22^\circ 30')\ (\approx 85^\circ 28')$,
$\alpha_2=2\operatorname{arc\,tg}(\sin 22^\circ 30')\ (\approx 41^\circ 53')$.

766. Площадь осевого сечения есть RH. Полная поверхность $\pi Rl+\pi R^2$. По условию $\frac{\pi(l+R)}{H}=n$. Если β — угол между осью и образующей, то $R=l\sin\beta$ и $H=l\cos\beta$. Подставляя эти выражения, получим

$$\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{n}{\pi}.$$

Это уравнение можно решить различными способами; короче всего применить формулу $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; мы получим

$$\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1+\cos(90^\circ-\beta)}{\sin(90^\circ-\beta)}=\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{n}{\pi}.$$

Отсюда можно определить угол $45^\circ-\frac{\beta}{2}$, а затем и угол β.

Однако не при всяком n задача имеет решения. Действительно, угол β заключён в границах от 0 до 90°; значит, угол $45^\circ-\frac{\beta}{2}$ заключён между 0 и 45°, т. е. величина $\frac{n}{\pi}=\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)$ непременно должна быть больше единицы, т. е. должно быть $n>\pi$. При $n=1, 2, 3$ задача не имеет решения.

Замечание. Уравнение

$$\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{n}{\pi}$$

можно решить ещё так. Представим его в виде $\frac{n}{\pi}\cos\beta-1=\sin\beta$, возведём в квадрат обе части равенства и заменим $\sin^2\beta$ через $1-\cos^2\beta$. Получим два решения: одно из них, $\cos\beta=0$, будет посторонним (оно является решением уравнения $\frac{n}{\pi}\cos\beta-1=-\sin\beta$); другое решение

$$\cos\beta=\frac{2n\pi}{\pi^2+n^2}$$

совпадает с предыдущим.

Однако теперь легко притти к ошибочному выводу, что задача имеет решение также и при $n=1, 2, 3$. Ведь при любом положительном значении n величина $\frac{2n\pi}{\pi^2+n^2}$ заключена между 0 и 1 (мы имеем $1-\frac{2n\pi}{\pi^2+n^2}=\frac{(\pi-n)^2}{\pi^2+n^2}>0$). Поэтому в пределах от 0 до 90° всегда найдётся угол, косинус которого равен $\frac{2n\pi}{\pi^2+n^2}$.

Ошибка этого рассуждения состоит в следующем. Из соотношения $\cos\beta = \frac{2n\pi}{\pi^2 + n^2}$ и данного уравнения следует, что $\sin\beta = \frac{n^2 - \pi^2}{\pi^2 + n^2}$. Отсюда видно, что должно быть $n > \pi$ (в противном случае угол β будет отрицательным, что невозможно).

Отв. Если $n < \pi$, то задача не имеет решения. Если $n > \pi$, то

$$\beta = 90^\circ - 2\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{n}{\pi}$$

или

$$\beta = \arccos\frac{2n\pi}{\pi^2 + n^2} = \arcsin\frac{n^2 - \pi^2}{n^2 + \pi^2}.$$

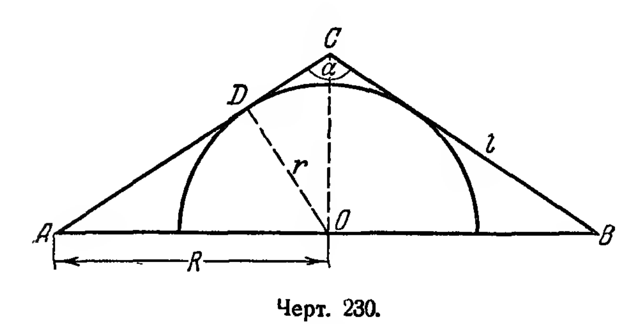
767. При обозначениях черт. 230 имеем

$$\frac{R(l + R)}{2r^2} = \frac{18}{5}.$$

Находим (из треугольника AOD)

$$r = R\cos\angle AOD = R\cos\angle ACO = R\cos\frac{\alpha}{2}$$

и (из треугольника AOC) $l = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.



Черт. 230.

Предыдушее равенство принимает вид

$$\frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{18}{5}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{18}{5}.$$

Сокращаем дробь на $1+\sin\frac{\alpha}{2}$ (эта величина не равна нулю). Уравнение приводится к виду

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{36}=0.$$

Отв. $\alpha_1=2\arcsin\frac{5}{6}\,(\approx 112^\circ 53')$

и

$$\alpha_2=2\arcsin\frac{1}{6}\,(\approx 19^\circ 11').$$

768. При обозначениях предыдущей задачи имеем соотношение $\frac{\pi}{3}R^2H=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$. Обозначим искомый угол через β $\left(\text{на черт. 230 } \beta=\frac{\alpha}{2}\right)$. Тогда $r=R\cos\beta$ и $H=R\operatorname{ctg}\beta$. Из предыдущего соотношения получим $3\operatorname{ctg}\beta-8\cos^3\beta=0$. Помножив обе части этого уравнения на $\operatorname{tg}\beta$ (эта величина по смыслу задачи не может равняться нулю), получим уравнение

$$3-8\sin\beta\cos^2\beta=0,$$

откуда

$$8\sin^3\beta-8\sin\beta+3=0.$$

Для решения этого кубического уравнения придётся применить какой-либо искусственный приём. Так, левую часть удаётся разложить на множители:

$$\begin{aligned}8\sin^3\beta-8\sin\beta+3&=(8\sin^3\beta-1)-(8\sin\beta-4)=\\&=[(2\sin\beta)^3-1]-4(2\sin\beta-1)=\\&=(2\sin\beta-1)[(2\sin\beta)^2+2\sin\beta+1-4].\end{aligned}$$

Следовательно, найденное уравнение распадается на два. Из первого находим $\sin\beta=\frac{1}{2}$, а из второго $\sin\beta=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$. (Другое решение квадратного уравнения не годится.) Проверка показывает, что оба найденных решения годны.

Отв. $\beta_1=30^\circ$; $\beta_2=\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}$.

769. По условию боковая поверхность конуса MCN (черт. 231) должна составлять половину боковой поверхности

конуса ACB. Но боковые поверхности этих конусов относятся, как квадраты образующих, т. е. $\frac{CN^2}{CB^2}=\frac{1}{2}$. А так как

$$CN=CO,$$

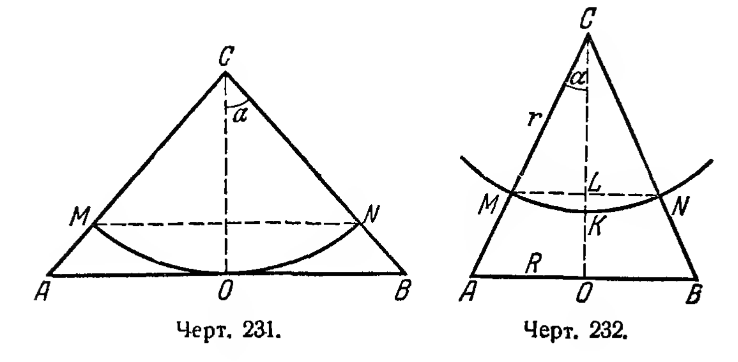
то

$$\left(\frac{CO}{CB}\right)^2=\frac{1}{2},$$

т. е.

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}.$$

Отв. $\alpha=45°$.



Черт. 231. Черт. 232.

770. По условию задачи объём V шарового сектора $CMKN$ (черт. 232) должен составлять половину объёма конуса ACB. Обозначим отрезок KL через h, а высоту конуса CO через H. Тогда $V=\frac{2}{3}\pi r^2h$. Получаем равенство $\frac{2}{3}\pi r^2h=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2H$, т. е. $4r^2h=R^2H$ или $4r^2h=H^3\operatorname{tg}^2\alpha$. Величину h выразим через r. Имеем

$$h=LK=CK-CL=r-r\cos\alpha=2r\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Получаем уравнение

$$8r^3\sin^2\frac{\alpha}{2}=H^3\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Отв. $r=\frac{H}{2}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

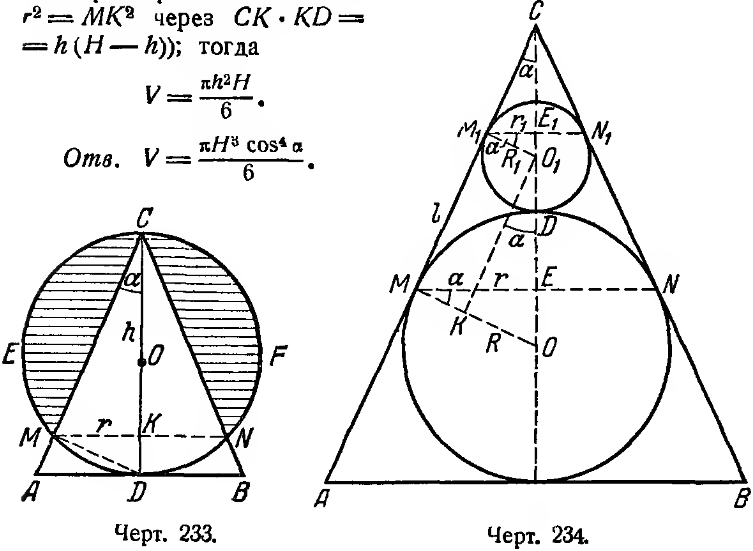
771. На черт. 233 осевое сечение той части шара, объём которой требуется определить, обозначено штриховкой. Этот объём V получается вычитанием объёма V_1 конуса MCN из объёма V_2 шарового сегмента $CEMKNF$. Введём обозначения: $MK = r$ и $KC = h$. Так как радиус шара равен $OC = \frac{1}{2}CD = \frac{H}{2}$, то

$$V = V_2 - V_1 = \pi h^2\left(\frac{H}{2} - \frac{h}{3}\right) - \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Сюда нужно подставить выражения $h = MC \cdot \cos\alpha = H\cos^2\alpha$ и $r = MC \cdot \sin\alpha = H\cos\alpha\sin\alpha$ (вычисление упростится, если предварительно заменить $r^2 = MK^2$ через $CK \cdot KD = h(H - h)$); тогда

$$V = \frac{\pi h^2 H}{6}.$$

Отв. $V = \frac{\pi H^3\cos^4\alpha}{6}$.



Черт. 233. Черт. 234.

772. При обозначениях черт. 234 имеем: $S_{бок} = \pi(r + r_1)l$. *Проведём радиусы* $OM = R$ *и* $O_1M_1 = R_1$ *в точки касания и* прямую O_1K, перпендикулярную к OM. Получим треугольники $O_1M_1E_1$, OME и O_1KO, которые подобны друг другу (как прямоугольные, имеющие по равному углу α). В $\triangle O_1KO$ имеем

$$O_1O = R + R_1; \quad OK = R - R_1; \quad O_1K = MM_1 = l.$$

Следовательно,

$$l = \sqrt{(R+R_1)^2-(R-R_1)^2} = 2\sqrt{RR_1}.$$

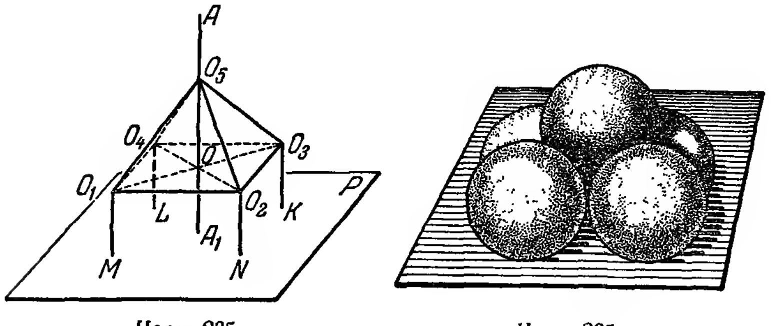
Из подобных треугольников OME и O_1KO имеем $\frac{r}{l} = \frac{R}{R+R_1}$; отсюда

$$r = \frac{lR}{R+R_1} = \frac{2R\sqrt{RR_1}}{R+R_1}.$$

Из треугольников $O_1M_1E_1$ и O_1KO имеем $\frac{r_1}{l} = \frac{R_1}{R+R_1}$; отсюда $r_1 = \frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R+R_1}$.

Отв. $S_{бок} = 4\pi RR_1$.

773. На плоскости P (черт. 235)[1] лежат четыре шара радиуса r; M, N, K и L — точки их касания с плоскостью P.



Черт. 235. Черт. 235а.

Их центры O_1, O_2, O_3, O_4 удалены от плоскости на расстояния $O_1M = O_2N = O_3K = O_4L = r$. Расстояние между центрами двух касающихся друг друга шаров равно $2r$, т. е. $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1 = 2r$. Пятый шар касается каждого из четырёх первых; следовательно, центр его O_5 удалён от центров O_1, O_2, O_3, O_4 также на расстояние $2r$, т. е. $O_1O_5 = O_2O_5 = O_3O_5 = O_4O_5 = 2r$. Поэтому фигура $O_5O_1O_2O_3O_4$ будет правильная четырёхугольная пирамида, у которой все рёбра равны (как при основании, так и

[1]) См. сноску на стр. 454.

боковые). Центр пятого шара будет удалён от плоскости P на расстояние, равное $OO_5 + OA_1 = OO_5 + r$. Верхняя точка A пятого шара будет находиться на продолжении перпендикуляра A_1O_5 на расстоянии $O_5A = r$ от центра O_5. Таким образом, расстояние AA_1 от верхней точки пятого шара до плоскости P равно $2r + OO_5$. Отрезок OO_5 находим из прямоугольного треугольника O_1OO_5, где

$$O_1O_5 = 2r \quad \text{и} \quad OO_1 = \frac{O_1O_2}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}}.$$

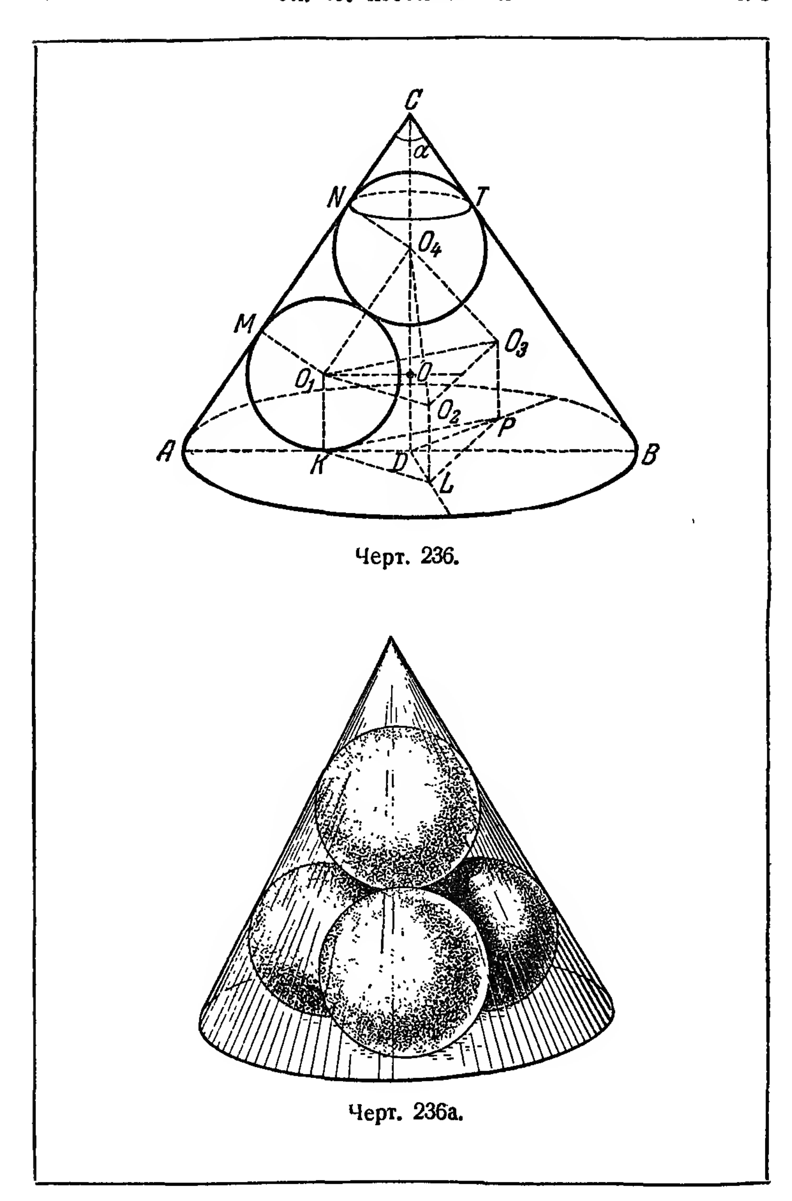
Отв. $AA_1 = r(2 + \sqrt{2})$.

774. Центры O_1, O_2, O_3, O_4 четырёх шаров должны находиться на расстоянии $2r$ друг от друга (см. предыдущую задачу). Значит, фигура $O_1O_2O_3O_4$ — правильный тетраэдр с ребром $2r$. Конус ACB (черт. 236)[1]), описанный около четырёх шаров, касается одного из них O_4 по окружности NT, а каждого из трёх остальных (например шара O_1) в двух точках: одна из них, K, лежит на основании, другая, M — на боковой поверхности. Ось конуса совпадает с высотой O_4O тетраэдра. Центр O_1 лежит в плоскости осевого сечения ACD, проходящего через точку касания M (ибо прямая O_1M перпендикулярна к общей касательной плоскости конуса и шара, а плоскость осевого сечения ACD перпендикулярна к этой касательной плоскости). Значит, плоскость ACD пересекает шар O_1 по большому кругу; шар O_4 она пересекает тоже по большому кругу, и образующая AC есть общая касательная этих больших кругов. Следовательно, $AC \parallel O_1O_4$ и $\angle O_1O_4O = \angle ACD = \frac{\alpha}{2}$ (α — искомый угол при вершине C осевого сечения). Значит, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OO_1}{O_1O_4}$. Но $O_1O_4 = 2r$, а отрезок OO_1 (радиус круга, описанного около треугольника, $O_1O_2O_3$) равен $\frac{O_1O_2}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Получаем $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Отсюда можно найти $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

Отв. $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos\frac{1}{3}$.

---

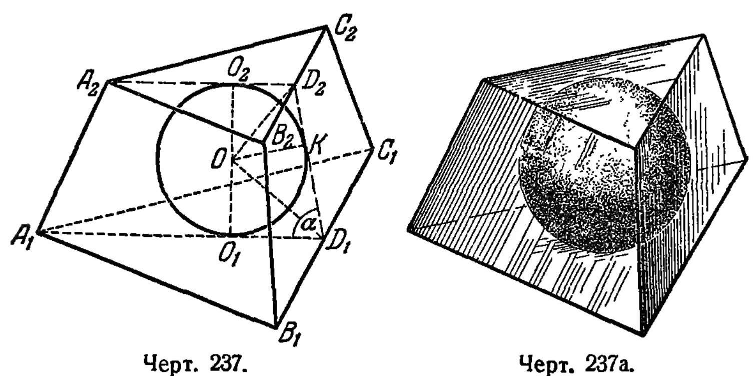
[1]) См. сноску на стр. 454.



Черт. 236.

Черт. 236а.

775. Плоскость, делящая пополам двугранный угол при ребре A_1A_2 (черт. 237) [1]) усечённой пирамиды, проходит через высоту O_1O_2 и перпендикулярна к грани $B_1C_1C_2B_2$ (доказать!). Аналогично для двух других боковых рёбер. Поэтому центр шара, касающегося граней пирамиды, лежит на высоте (а именно, на середине высоты, так как шар касается и оснований), а точка K касания шара с гранью $B_1C_1C_2B_2$ лежит



Черт. 237. Черт. 237а.

на апофеме D_1D_2 этой грани. Аналогично для других боковых граней. Имеем

$$S_п = \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1^2 + a_2^2) + 3\cdot\frac{(a_1+a_2)l}{2}$$

($a_1 = B_1C_1$ и $a_2 = B_2C_2$ — стороны оснований и $l = D_1D_2$ — апофема боковой грани). Если $r_1 = O_1D_1$ и $r_2 = O_2D_2$ — радиусы кругов, вписанных в основания, то $a_1 = 2r_1\sqrt{3}$ и $a_2 = 2r_2\sqrt{3}$. Поэтому

$$S_п = 3\sqrt{3}(r_1^2 + r_2^2) + 3\sqrt{3}(r_1 + r_2)l.$$

Как в задаче **751**, найдём что $r_1 + r_2 = l$ и $r_1^2 + r_2^2 = l^2 - 2r^2$. Тогда получим

$$S_п = 6\sqrt{3}(l^2 - r^2) = 6\sqrt{3}\left(\frac{4r^2}{\sin^2\alpha} - r^2\right).$$

Отв. $S_ш : S_п = \dfrac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}(4-\sin^2\alpha)}$.

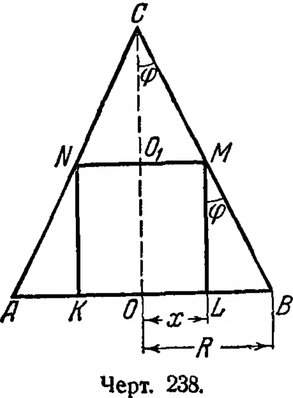
---

[1]) См. сноску к стр 454.

776. Обозначим радиус OL цилиндра (черт. 238) через x, а радиус OB основания конуса через R. Так как по условию $ML = R$, то полная поверхность цилиндра $S_{п} = 2\pi x^2 + 2\pi xR$. По условию $2\pi x^2 + 2\pi xR = \frac{3}{2}\pi R^2$ или $x^2 + Rx - \frac{3}{4}R^2 = 0$, откуда $x = \frac{R}{2}$ (отрицательное решение $x = -\frac{3}{2}R$ не годится). Из треугольника LMB находим

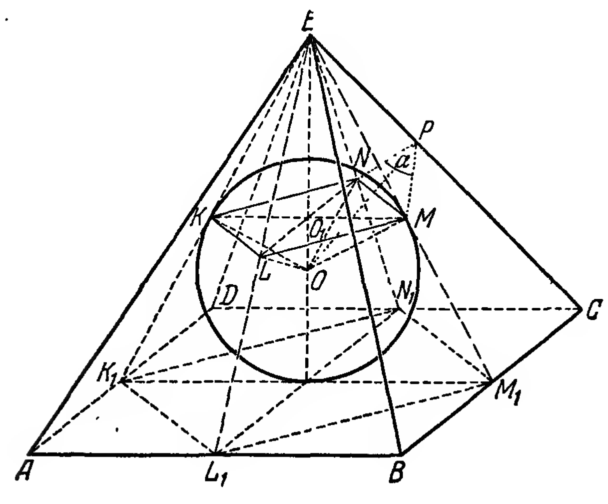
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{LB}{LM} = \frac{R-x}{R} = \frac{1}{2}.$$

Отв. $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$.



Черт. 238.

777. Центр O вписанного шара (черт. 239) лежит на вы-



Черт. 239.

соте пирамиды, а точки касания K, L, M, N шара с боковыми гранями лежат на апофемах EK_1, EL_1, EM_1, EN_1

(ср. задачу 775). Четырёхугольник $KLMN$ — квадрат, являющийся основанием пирамиды, объём которой требуется определить.

Проведём через радиусы OM и ON плоскость NOM. Она будет перпендикулярна к грани BEC (так как проходит через прямую OM, перпендикулярную к плоскости BEC), а также к грани DEC (так как проходит через ON). Следовательно, плоскость NOM перпендикулярна к ребру EC.

Пусть P — точка пересечения плоскости NOM с ребром EC. Тогда угол NPM есть линейный угол двугранного угла α. В четырёхугольнике $OMPN$ два угла (при вершинах M и N) прямые. Следовательно, $\angle NOM = 180° - \alpha$. Значит,

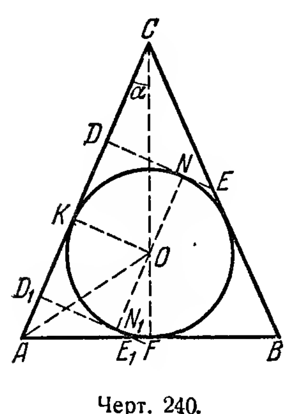
$$a = NM = 2 \cdot OM \cdot \sin\frac{180° - \alpha}{2} = 2r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника OO_1M, где $O_1M = \frac{a}{\sqrt{2}}$, находим

$$h = OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = r\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отв.

$$V = \frac{4}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\alpha}.$$



Черт. 240.

778. Можно провести две плоскости, перпендикулярные к данной образующей конуса (CA на черт. 240) и касающиеся вписанного шара; их точки касания (N и N_1) лежат на диаметре NN_1, параллельном CA. Положим сначала, что берётся плоскость ND, касающаяся шара в точке N. Четырёхугольник $ONDK$ (K — точка касания образующей CA с шаром) — квадрат, так что $DK = ON = r$. По условию $CD = d$. Следовательно, $CK = d + r$. Из треугольника KOC находим

$$CO = \sqrt{(d + r)^2 + r^2}.$$

Следовательчо,

$$H = CF = OF + OC = r + \sqrt{(d+r)^2 + r^2}.$$

Из подобия треугольников AFC и KOC находим

$$AF : H = OK : KC,$$

откуда

$$R = AF = \frac{OK \cdot H}{KC} = \frac{r\left[r + \sqrt{(d+r)^2 + r^2}\right]}{d+r}.$$

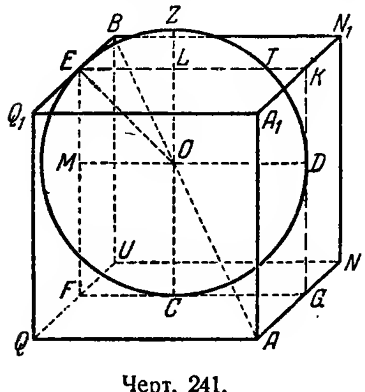
Если взять плоскость N_1D_1, то $d = CD_1$, и мы таким же образом получим

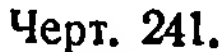
$$H = r + \sqrt{(d-r)^2 + r^2} \quad \text{и} \quad R = \frac{r\left[r + \sqrt{(d-r)^2 + r^2}\right]}{d-r}.$$

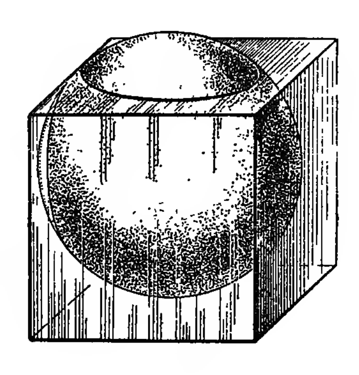
Отв.

$$V = \frac{\pi r^2 \left[r + \sqrt{(d+r)^2 + r^2}\right]^3}{3(d+r)^2} \quad \text{или} \quad V = \frac{\pi r^2 \left[r + \sqrt{(d-r)^2 + r^2}\right]^3}{3(d-r)^2}.$$

779. Центр O шара (черт. 241) [1]) лежит на диагонали AB. Действительно, точка O одинаково удалена от граней AA_1N_1N




Черт. 241.


Черт. 241а.

и AA_1Q_1Q. Значит, она лежит на плоскости, делящей пополам двугранный угол при ребре AA_1. Таким же образом точка O должна лежать на плоскости, делящей пополам

[1]) См. сноску на стр 454.

двугранный угол при ребре AN. А эти две плоскости пересекаются по диагонали AB.

Пусть C и D — точки касания шара с гранями $ANUQ$ и AA_1N_1N, а r — радиус шара. Тогда $OC = OD = r$, и плоскость $ODGC$ перпендикулярна к ребру AN, а также к ребру BQ_1.

Так как ребро BQ_1 по условию касается шара, то плоскость $ODGC$ пересечёт ребро в точке E его касания с шаром; следовательно, $OE = r$. С другой стороны, точка E есть вершина квадрата $FGKE$, получаемого в сечении куба плоскостью $ODGC$; значит, четырёхугольник $MOLE$ (OL и OM — продолжения прямых OC и OD) — квадрат. Следовательно, $OM = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Так как $OM + OD = MD = a$, то $\frac{r}{\sqrt{2}} + r = a$, откуда $r = (2 - \sqrt{2})a$.

Часть поверхности сферы, лежащая вне куба, состоит из трёх равных сегментов, один из которых есть $EZTL$. Поверхность этого сегмента равна

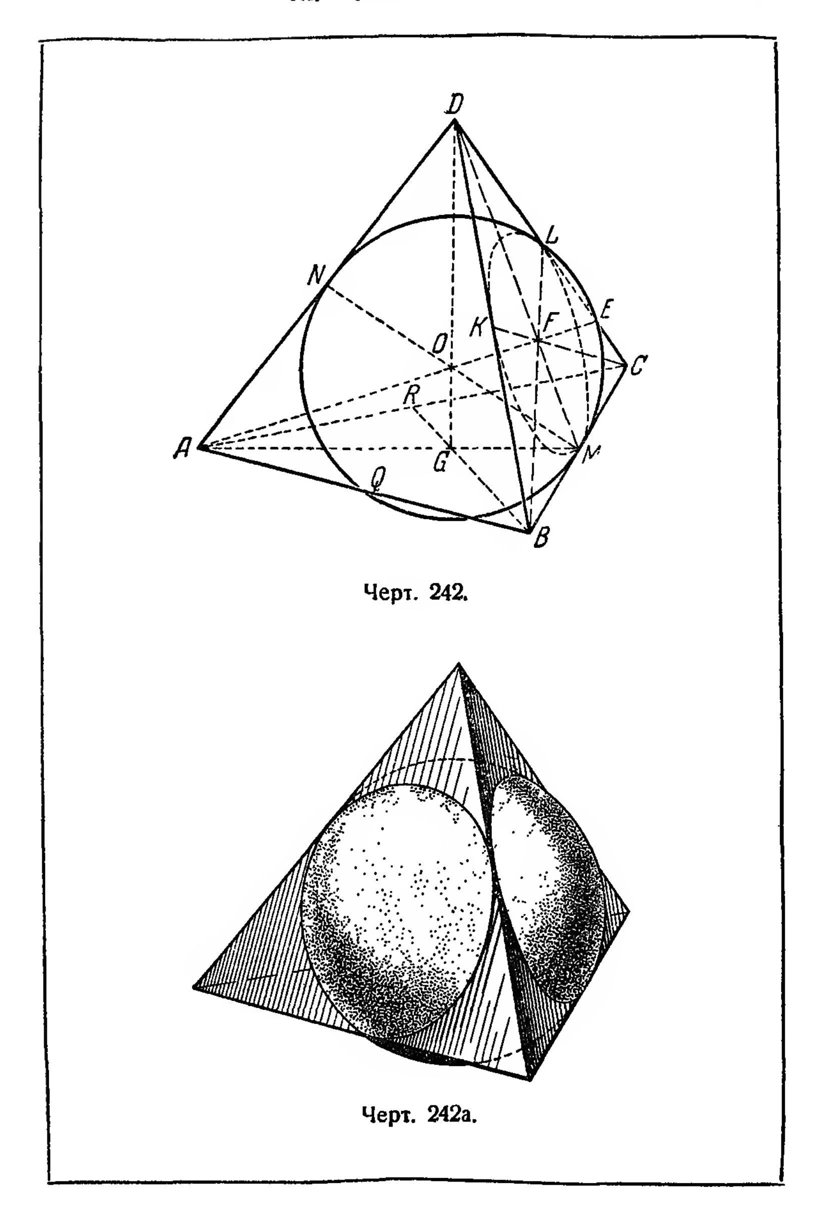
$$2\pi r \cdot LZ = 2\pi r (CZ - CL) = 2\pi r (2r - a).$$

Отв. $r = (2 - \sqrt{2})a$; $S = 6\pi a^2 (10 - 7\sqrt{2})$.

780. Центр шара, касающегося рёбер тетраэдра $ABCD$ (черт. 242 и 242а) [1], совпадает с центром тетраэдра (т. е. с точкой O, равноотстоящей от вершин A, B, C, D), а точки касания шара с рёбрами суть середины рёбер. Например, точка касания N есть середина ребра AD. Действительно, все шесть равнобедренных треугольников AOB, BOC, COA, BOD, COD, и AOD (начерчен только треугольник AOD) равны друг другу (по трём сторонам). Следовательно, их высоты OM, ON и т. д. равны. Поэтому, если описать шар радиусом $ON = r$, то он пройдёт через середины L, M, N, Q, K, R рёбер и там коснётся их (так как $ON \perp AD$ и т. д.).

Проведём через высоту тетраэдра DG и ребро AD плоскость ADG. Она будет перпендикулярна к ребру BC (доказательство дано в задаче **652**) и пересечёт это ребро в его середине M. В сечении получим равнобедренный треугольник AMD ($AM = MD$). Проведём высоту MN этого

[1]) См. сноску на стр 454.



Черт. 242.

Черт. 242а.

треугольника (N — середина AD). Центр O лежит на MN (так как он равноудалён от A и D). Следовательно, $MO = NO$. Значит, $r = \frac{MN}{2}$. Высота MN определяется из треугольника ANM, где $AN = \frac{a}{2}$ и $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как апофема равностороннего треугольника ABC). Имеем

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$r = \frac{MN}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Часть шара, расположенная вне тетраэдра, состоит из четырёх равных сегментов, отсекаемых от шара гранями тетраэдра. Рассмотрим одну из граней BDC. Круг LMK, лежащий в основании сегмента, вписан в равносторонний треугольник BDC (ибо стороны треугольника касаются шара; значит, они касаются и малого круга LMK, лежащего в плоскости BDC). Радиус этого круга $FM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Следовательно,

$$OF = \sqrt{OM^2 - FM^2} = \sqrt{r^2 - FM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

Значит, высота сегмента

$$h = FE = OE - OF = \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{2}}{12}(3 - \sqrt{3}).$$

Объём V_0 одного сегмента равен

$$V_0 = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) = \pi\left[\frac{a\sqrt{2}}{12}(3 - \sqrt{3})\right]^2 \cdot \left[\frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{36}(3 - \sqrt{3})\right] = \frac{\pi a^3\sqrt{2}(9 - 4\sqrt{3})}{432};$$

искомый объём

$$V = 4V_0.$$

Замечание Круг LKM, вписанный в треугольник BCD, изображается эллипсом, который легко будет начертить от руки, если кроме точек K, L, M предварительно отметить ещё три точки, соответственно симметричные с ними относительно F (точка F есть точка пересечения медиан треугольника BDC).

Отв. $r=\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}(9-4\sqrt{3})}{108}$.

ГЛАВА 11

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

781. Выразим секансы через косинусы; получим в левой части

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Так как

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

то левая часть равна

$$\frac{2}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{2}{\cos 2\alpha}=2\sec 2\alpha.$$

782. Приводим левую часть к общему знаменателю и преобразуем $2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ к виду

$$\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]+\sin[\alpha-(\alpha+\beta)]=\sin(2\alpha+\beta)+\sin(-\beta).$$

783. Левая часть равна

$$\frac{2(1+\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cdot 2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Чтобы перейти к углу $\frac{\alpha}{2}$, используем формулу $\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi-1}{2\operatorname{ctg}\varphi}$ (угол $\frac{\alpha}{2}$ принимается за φ). Получаем

$$2\operatorname{ctg}\alpha=2\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

784. Имеем

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\alpha=$$
$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Таким же образом найдём

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Следовательно, левая часть равна

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

785. Умножим числитель и знаменатель левой части на $\cos\alpha+\sin\alpha$ и, упростив, получим $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ или

$$\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha.$$

786. Так как $\sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$, то левую часть представим так:

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=$$
$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}.$$

Применив формулу разности косинусов (или раскрыв выражения $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$ по формулам косинуса суммы и разности), получим

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha}{2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

787. Числитель равен $\cos 2\alpha$; знаменатель преобразуется к виду

$$2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=$$
$$=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

С помощью формулы

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$$

получим

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right);$$

это выражение равно $\cos 2\alpha$, так что левая часть равна 1.

788. Имеем

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Рассматривая угол $\frac{\pi}{4}-\alpha$ как половину угла $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ и применяя формулы для синуса и косинуса половинного угла, получаем

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

789. Выразив тангенс и котангенс через синусы и косинусы, получим

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Подставим полученное выражение в знаменатель левой части; тогда в левой части получим

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

790. Заменим $\sin\alpha$ через $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и $\cos\alpha$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и применим формулы суммы косинусов и разности синусов.

791. Заменим в числителе единицу на $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, а $\sin 2\alpha$ на $2\sin\alpha\cos\alpha$. В числителе получим $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$; знаменатель же равен

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

Сократив дробь на $\cos\alpha+\sin\alpha$, получим $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$. Разделив числитель и знаменатель на $\cos\alpha$, найдем $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$. [В задаче **784** показано, что это выражение преобразуется к виду $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.]

792. Как в задаче **790**, преобразуем левую часть к виду $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$. Теперь применим формулу $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\left(\text{приняв } \frac{\pi}{4}-y \text{ за } \frac{\alpha}{2}\right)$. Получим

$$\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}=\frac{1+\sin 2y}{\cos 2y}.$$

793. Выразив левую часть данного тождества через синус и косинус, произведя вычитание полученных дробей и применив формулу разности квадратов, получим левую часть в виде

$$\frac{(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

а это выражение сразу дает правую часть.

794. Применим формулу

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

$\left(\text{приняв } \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2} \text{ за } \frac{\varphi}{2}\right)$. Получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha},$$

после чего левая часть преобразуется в правую.

795. Решается как предыдущая задача.

796. Заменим $2\cos^2\alpha$ через $1+\cos 2\alpha$; тогда числитель примет вид: $2(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$. Члены знаменателя сгруппируем так: $(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\sin 3\alpha-\sin\alpha)$ и применим фор-

мулы для разности косинусов и синусов. Вынося $2\sin\alpha$ за скобки, получим $2\sin\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$. После сокращения на $2(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$ получим правую часть.

797. Преобразуем числитель дроби, стоящей в левой части тождества:

$$\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha\cos 2\alpha-\sin 3\alpha=$$
$$=\sin 3\alpha(2\cos 2\alpha-1).$$

Произведя аналогичные преобразования в знаменателе дроби, получим $\cos 3\alpha(2\cos 2\alpha-1)$.

798. Преобразуем сумму первых двух членов левой части тождества по формуле суммы синусов, а третье слагаемое $\sin(b-c)$ будем рассматривать как синус двойного угла. Получим

$$2\sin\frac{2a-b-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}+2\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}=$$
$$=2\cos\frac{b-c}{2}\left[\sin\frac{2a-b-c}{2}+\sin\frac{b-c}{2}\right].$$

К выражению в скобках применим формулу суммы синусов.

799. Рассматривая выражение $\sin^6 x+\cos^6 x$ как сумму кубов, разложим его на множители и учтем, что $\sin^2 x+$ $+\cos^2 x=1$. Тогда левая часть равенства преобразуется к виду

$$-\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x-\cos^4 x+1=$$
$$=1-(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=0.$$

800. Сумму двух последних членов преобразуем как сумму синусов. Получим

$$\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=2\sin(\pi+\alpha)\cos\frac{\pi}{3}=$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

Следовательно, левая часть равна нулю.

801. Применим формулу $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}$ к первому и ко второму слагаемым $\Big($приняв за $\frac{\varphi}{2}$ один раз $45^\circ+\alpha$, а дру-

гой раз $30° - \alpha$). Будем иметь

$$\sin^2(45° + \alpha) = \frac{1 - \cos(90° + 2\alpha)}{2} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$$

и

$$\sin^2(30° - \alpha) = \frac{1 - \cos(60° - 2\alpha)}{2} = \frac{1 - \sin(30° + 2\alpha)}{2}.$$

Третий член преобразуем по формуле

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)].$$

Тогда левая часть примет вид

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{2} - \frac{1 - \sin(30° + 2\alpha)}{2} - \frac{\sin(30° + 2\alpha) + \sin(-2\alpha)}{2}.$$

После приведения подобных членов получаем $\sin 2\alpha$.

802. Числитель левой части представим в виде

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - 2\cos^2\varphi = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi.$$

803. В правой части заменим $\sin 2\alpha$ на $2\sin\alpha\cos\alpha$. Сократив дробь на $2\sin\alpha$, получим в правой части выражение $\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$, равное $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

804. Объединив второй и третий члены, вынесем за скобки $\cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$. Левая часть примет вид

$$\cos^2\varphi - (\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi).$$

Преобразовав произведение суммы на разность, найдем:

$$\cos^2\varphi - \cos^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\alpha\sin^2\varphi =$$
$$= \cos^2\varphi(1 - \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha\sin^2\varphi =$$
$$= \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\varphi,$$

а это выражение дает $\sin^2\alpha$.

805. Раскрыв выражение $\cos(\alpha + \beta)$, получим:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

Оставим без изменения третий член, а остальные сгруппируем и преобразуем следующим образом:

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) =$$
$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta.$$

Теперь данное выражение принимает вид

$$(\sin\alpha\cos\beta)^2+(\cos\alpha\sin\beta)^2+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2=\sin^2(\alpha+\beta).$$

Отв. $\sin^2(\alpha+\beta)$.

806. Преобразуем сначала выражение $-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Применив формулу

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

получим

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=-[\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma].$$

К каждому из слагаемых применим то же преобразование. Получим

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$
$$=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+$$
$$+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Теперь учтем, что по условию $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Тогда будем иметь

$$\cos(\alpha-\beta-\gamma)=\cos(\beta+\gamma-\alpha)=\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)=$$
$$=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha.$$

Выполнив аналогичные преобразования, найдем, что

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+1).$$

Теперь применим формулу $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ и две аналогичные формулы для $\cos 2\beta$ и $\cos 2\gamma$. Тогда данное выражение преобразуется к виду

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\frac{1}{2}(4-2\sin^2\alpha-2\sin^2\beta-2\sin^2\gamma),$$

а это выражение равно 2.

807. Представим левую часть в виде

$$\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)\operatorname{ctg}C.$$

Выражение в скобках равно $\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$, а сомножитель $\operatorname{ctg}C$, если заменить C равным выражением $\pi-(A+B)$, примет

вид $-\operatorname{ctg}(A+B)$. Следовательно, данное выражение равно

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - \frac{\cos(A+B)}{\sin A \sin B}.$$

Применив формулу косинуса суммы, преобразуем его к виду

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - \left(\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} - \frac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B}\right) =$$
$$= \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - (\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1) = 1.$$

808. Заменим множители $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{2\pi}{5}$ выражениями $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$ и $\dfrac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}$. Тогда левая часть преобразуется к виду $\sin\frac{4\pi}{5} : 4\sin\frac{\pi}{5}$. А так как $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$, то левая часть обратится в $\frac{1}{4}$.

809. Преобразуем левую часть по формуле суммы косинусов. Получим $2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$. Дальше — как в предыдущей задаче.

810. Так как $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, то данное выражение примет вид $2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$ или $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)$. Напишем $\cos 60°$ вместо $\frac{1}{2}$; получим $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos 60°\right)$.

Отв. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+30°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-30°\right)$.

811. Преобразовав данное выражение, как в предыдущей задаче, получим $2\cos\alpha\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Вместо $\frac{\sqrt{2}}{2}$ напишем $\cos 45°$.

Отв. $4\cos\alpha\sin\frac{45°+\alpha}{2}\sin\frac{45°-\alpha}{2}$.

812. Запишем данное выражение в виде $\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$, последнее выражение приводится к виду, удобному для логарифмирования, как в задаче **656**.

Отв. $\cos 2\alpha \cos 2\beta$.

813. Сгруппируем члены таким образом:

$$(1+\cos\alpha)+(\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha),$$

и вынесем за скобки во второй группе $\operatorname{tg}\alpha$. Получим $(1+\cos\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)$. Вместо $1+\operatorname{tg}\alpha$ напишем

$$\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}.$$

Отв. $\dfrac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}$.

814. Применив формулы $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, в числителе получим $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. Выражение в скобках равно $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. Пользуясь формулой суммы синусов, приведем его к виду $\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Отв. $2\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

815. Данное выражение равно $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$. Числитель преобразуется к виду $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ (см. предыдущую задачу). Дробь еще упростим, представив знаменатель в виде

$$\sin(90^\circ-\alpha)=2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Отв. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

816. Так как $\cos\alpha - \cos 3\alpha = 2\sin 2\alpha \sin\alpha$, то

$$2\sin 2\alpha \sin\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right) = \\ = 2\sin 2\alpha(\sin\alpha + \sin 30^\circ).$$

Отв. $4\sin 2\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)$.

817. Данное выражение равно

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ т. е. } 2\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Отв. $2\operatorname{tg} 2\alpha$.

818. Заменив $\sin 2\beta$ на $2\sin\beta\cos\beta$ и сократив на $2\sin\beta$, получим $\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}$; применив формулу

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}},$$

получим $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

Отв. $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

819. Преобразовав сумму $\cos\alpha + \sin\alpha$ в числителе $\sqrt{2} - (\cos\alpha + \sin\alpha)$ и разность $\sin\alpha - \cos\alpha$ в знаменателе, как в задаче 814, получим

$$\frac{\sqrt{2}[1 - \cos(\alpha - 45^\circ)]}{\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ)} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha - 45^\circ}{2}}{2\sin\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\cos\frac{\alpha - 45^\circ}{2}}.$$

Отв. $\operatorname{tg}\frac{\alpha - 45^\circ}{2}$.

820. Преобразуем сумму двух последних членов:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Отв. $2\operatorname{ctg}\alpha$.

821. Заменим $\cos 2\alpha$ на $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, а $\sin 2\alpha$ — на $2\sin\alpha\cos\alpha$.

Отв. 1.

822. Заменим $2\sin^2\alpha - 1$ на $-\cos 2\alpha$ и представим данное выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$. Напишем $\cos 30^\circ$ вместо $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin 30^\circ$ вместо $\frac{1}{2}$.

Отв. $2\sin(2\alpha - 30^\circ)$.

823. Числитель равен

$$\frac{\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{\cos(2\alpha - \alpha)}{\cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}.$$

Знаменатель равен

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}.$$

Отв. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$.

824. Данное выражение равно (см. предыдущую задачу)

$$2 + \frac{2}{\sin 4\alpha} = \frac{2}{\sin 4\alpha}(1 + \sin 4\alpha).$$

Выражение в скобках равно

$$1 + \cos(90^\circ - 4\alpha) = 2\cos^2\frac{90^\circ - 4\alpha}{2}.$$

Отв. $\frac{4\cos^2(45^\circ - 2\alpha)}{\sin 4\alpha}$.

825. Последнее слагаемое равно $\cos^2 x$, так что данное выражение представляется в виде $(\operatorname{tg} x - 1)(1 - \sin x) + \cos^2 x$. Заменив $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, вынесем за скобки $1 - \sin x$. Получим

$$(1 - \sin x)[(\operatorname{tg} x - 1) + 1 + \sin x] = (1 - \sin x)(\operatorname{tg} x + \sin x) =$$
$$= (1 - \sin x)\operatorname{tg} x(1 + \cos x).$$

Первый сомножитель преобразуется, как в предыдущей задаче.

Отв. $4\operatorname{tg} x \cos^2\frac{x}{2}\sin^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$.

826. Числитель и знаменатель дроби соответственно равны:

$$(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)=2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha$$

и

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha.$$

Отв. $2\cos\alpha$.

827. Данное выражение равно

$$(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=$$
$$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha).$$

Получаем выражение $\cos^2\beta-\cos^2\alpha$, которое преобразуется, как в решении задачи **656**.

Отв. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

828. Приведём данное выражение к общему знаменателю $\cos x\cos y\cos z$. Числитель будет

$$\sin x\cos y\cos z+\sin y\cos z\cos x+\sin z\cos x\cos y-$$
$$-\sin[(x+y)+z].$$

Последний член равен $-\sin(x+y)\cos z-\cos(x+y)\sin z$. Сумма первых двух членов взаимно уничтожается с членом $-\sin(x+y)\cos z$, и числитель принимает вид

$$\sin z\cos x\cos y-\cos(x+y)\sin z=$$
$$=\sin z[\cos x\cos y-\cos(x+y)].$$

Раскрывая выражение $\cos(x+y)$, получаем в числителе $\sin z\sin x\sin y$.

Отв. $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$.

829. Данное выражение равно $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma$. Но по условию $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$; следовательно, получаем

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Выносим за скобки $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\left(\text{или, что то же, } 2\sin\frac{180°-\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\right)$. В скобках получаем выражение $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, которое преобразуется по формуле суммы косинусов.

Отв. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

ГЛАВА 12

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

830. Произведя упрощения, получим $\sin 5x - \sin 3x = 0$. Применив формулу разности синусов, имеем $2\sin x\cos 4x = 0$, и уравнение распадается на два: $\sin x = 0$ и $\cos 4x = 0$. Из первого имеем $x = \pi n$ (n — любое целое число), из второго $4x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4n \pm 1)$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{8}(4n \pm 1).$$

Выражение $4n \pm 1$ содержит в себе все нечётные числа (числа -3, 1, 5, 9, 13 и т. д. получаются из выражения $4n+1$; числа -1, 3, 7, 11, 15 и т. д. — из выражения $4n-1$). Поэтому вместо $4n \pm 1$ можно написать $2n+1$ (или $2n-1$), где n — любое целое число.

Отв. $x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{8}(2n+1)$, где n — любое целое число.

831. Преобразуем левую часть уравнения следующим образом:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x =$$
$$= (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) =$$
$$= 2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x =$$
$$= 2\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = \left(4\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos x.$$

Уравнение принимает вид

$$\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x = 0$$

и распадается на три уравнения:

$$\sin\frac{5x}{2} = 0; \qquad \cos\frac{x}{2} = 0; \qquad \cos x = 0.$$

Отв. $x = 72^\circ n$; $x = 180^\circ(2n+1)$; $x = 90^\circ(2n+1)$.

832. Выполним преобразования

$$\cos(x + 60^\circ) = \cos[90^\circ - (30^\circ - x)] = \sin(30^\circ - x)$$

и

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$$

Уравнение примет вид

$$\sin(x+30^\circ)+\sin(30^\circ-x)=2\cos^2 x.$$

Применим формулу суммы синусов; получим

$$\sin 30^\circ \cos x-\cos^2 x=0 \quad \text{или} \quad \cos x\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)=0.$$

Отв. $x=90^\circ(2n+1)$; $x=60^\circ(6n\pm 1)$.

833. Перенесем все члены уравнения в левую часть и сгруппируем следующим образом:

$$(\sin x+\sin 3x)-(\cos x+\cos 3x)+(\sin 2x-\cos 2x)=0.$$

Преобразуя выражения в первых двух группах, получим

$$2\sin 2x\cos x-2\cos 2x\cos x+(\sin 2x-\cos 2x)=0$$

или

$$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$2\cos x+1=0 \quad \text{и} \quad \sin 2x-\cos 2x=0.$$

Первое дает: $\cos x=-\frac{1}{2}$; $x=2\pi n\pm\frac{2}{3}\pi$. Разделив второе уравнение почленно на $\cos 2x$, получим $\operatorname{tg} 2x=1$, откуда $2x=\pi n+\frac{\pi}{4}$.

Отв. $x=\frac{2\pi}{3}(3n\pm 1)$; $x=\frac{\pi}{8}(4n+1)$.

834. Произведем следующую группировку:

$$(\cos 2x+\cos 6x)-(1+\cos 8x)=0.$$

Применив формулу $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ и преобразовав сумму косинусов, получим

$$2\cos 4x\cos 2x-2\cos^2 4x=0.$$

Вынесем $2\cos 4x$ за скобки и преобразуем разность косинусов $\cos 2x-\cos 4x$. Получим уравнение

$$\cos 4x\sin 3x\sin x=0.$$

Оно распадается на три:

$$1)\ \cos 4x=0;\quad 2)\ \sin 3x=0;\quad 3)\ \sin x=0.$$

Но третье уравнение можно не рассматривать: все его решения содержатся в числе решений уравнения $\sin 3x = 0$. Действительно, если $\sin x = 0$, то и $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$.

Отв. $x = \frac{\pi}{8}(2n+1)$; $x = \frac{\pi n}{3}$.

835. В правой части напишем $2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$ вместо $\sin 3x$. Уравнение примет вид

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

или

$$\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0.$$

Выражение в скобках запишем в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - \cos\frac{3x}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, данное уравнение распадается на три:

1) $\sin\frac{3x}{2} = 0$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0$; 3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Отв. $x = \frac{2\pi n}{3}$; $x = \frac{\pi}{2}(4n-1)$; $x = \frac{\pi}{4}(4n+1)$.

836. Правая часть равна

$$\sin[90° - (x+30°)] = \sin(60° - x) = -\sin(x - 60°).$$

Уравнение принимает вид

$$\sin(x - 60°) = -\sin(x - 60°) \text{ или } \sin(x - 60°) = 0,$$

откуда $x - 60° = 180°n$.

Отв. $x = 60°(3n+1)$.

837. Заменив $2\sin^2 x$ на $1 - \cos 2x$, приведем уравнение к виду $2\sin 3x\cos 2x - \cos 2x = 0$. Это уравнение распадается на два: 1) $\cos 2x = 0$; 2) $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Так как $\frac{1}{2}$ есть $\sin 30°$, то второе уравнение дает

$$3x = 180°n + (-1)^n 30°.$$

Отв. $x = 45°(2n+1)$; $x = 60°n + (-1)^n 10°$.

838. Правую часть напишем так: $3(\sin x\cos x - \sin^2 x + 1) = 3(\sin x\cos x + \cos^2 x) = 3\cos^2 x(\operatorname{tg} x + 1)$. Данное уравнение распадается на два: 1) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$; 2) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$. Из второго получим $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$.

Отв. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1)$.

839. Имеем уравнение

$$\cos 4x + 2\cos^2 x = 0.$$

Так как $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, то левая часть равна

$$(1 + \cos 4x) + \cos 2x = 2\cos^2 2x + \cos 2x.$$

Получаем уравнение

$$\cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0,$$

распадающееся на два:

$$1)\ \cos 2x = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ 2\cos 2x + 1 = 0.$$

Второе дает $2x = 360°n \pm 120°$.

Отв. $x = 180°n \pm 45°$; $x = 180°n \pm 60°$.

840. Помножим обе части уравнения на $\sin x$ и, заменив в правой части единицу на $\sin^2 x + \cos^2 x$, получим уравнение $\sin x\cos x = \cos^2 x$.

Замечание. Умножая обе части уравнения на $\sin x$, мы не получаем посторонних решений, так как $\sin x$ ни при одном из найденных значений x не обращается в нуль.

Отв. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$.

841. Запишем уравнение так:

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0.$$

Оно распадается на два:

$$1)\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Первое дает $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, откуда $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$.

Второе дает $x = \frac{\pi}{10}(4n + 1)$.

Отв. $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$; $x = \frac{\pi}{10}(4n + 1)$.

842. Прибавим к обеим частям уравнения по $2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}$, после чего в левой части получим

$$\sin^4\frac{x}{3}+2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\left(\sin^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}\right)^2=1,$$

и уравнение примет вид

$$1=\frac{5}{8}+2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}\quad \text{или}\quad 2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}=\frac{3}{8}.$$

Умножим обе части уравнения на 2 и применим формулу для синуса двойного угла. Получим $\sin^2\frac{2x}{3}=\frac{3}{4}$, откуда $\sin\frac{2x}{3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отв. $x=\frac{\pi}{2}(3n\pm 1)$.

843. Представим уравнение в виде $3\operatorname{tg}^2 x-(1+\operatorname{tg}^2 x)=1$, откуда $\operatorname{tg} x=\pm 1$.

Отв. $x=45^\circ(2n+1)$.

844. Заменим $1+\cos 4x$ на $2\cos^2 2x$.

Отв. $x=\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}$; $\quad x=\frac{\pi n}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$.

845. Прибавив к обеим частям уравнения по $2\sin^2 x\cos^2 x$, получим $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\cos 4x+2\sin^2 x\cos^2 x$ или $1-\cos 4x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Отв. $x=\frac{\pi}{2}n$.

846. Заменим $\sin 2x$ на $2\sin x\cos x$ и разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$. Заранее видно, что потери корней не будет. Действительно, если $\cos x=0$, то $\sin x=\pm 1$, а эти значения не удовлетворяют данному уравнению. Получим

$$3-\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x=0.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} x=1\quad \text{и}\quad \operatorname{tg} x=-3.$$

Отв. $x=\pi n+\frac{\pi}{4}$; $\quad x=\pi n-\operatorname{arc\,tg} 3$.

847. Напишем $\sin^2 x + \cos^2 x$ вместо единицы и, разделив обе части на $\cos^2 x$ (см. решение предыдущей задачи), получим

$$\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$$

Отв. $x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{3}(3n - 1)$.

848. Представим 2 как $2\sin^2 x + 2\cos^2 x$, после чего уравнение решается как предыдущее.

Отв. $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$; $x = \pi n - \operatorname{arc\,tg}\frac{7}{4}$.

849. *Отв.* $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$; $x = \pi n + \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}$.

850. Заменим $\sqrt{3}$ на $\operatorname{ctg} 30°$ (вводим «вспомогательный угол» 30°). Данное уравнение запишется так:

$$\sin x + \frac{\cos 30°}{\sin 30°}\cos x = 1,$$

или

$$\sin x \sin 30° + \cos x \cos 30° = \sin 30°$$

или еще так:

$$\cos(x - 30°) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $x - 30° = 360°n \pm 60°$.

Отв. $x = 360°n + 90° = 90°(4n + 1)$; $x = 360°n - 30° = 30°(12n - 1)$.

851. Левую часть можно представить в виде произведения $\sqrt{2}\cos(x - 45°)$. Получим уравнение $\cos(x - 45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; оно дает $x - 45° = 360°n - 45°$ и $x - 45° = 360°n + 45°$, то есть $x = 360°n$ и $x = 360°n + 90°$ или $x = 90° \cdot 4n$ и $x = 90°(4n + 1)$.

Другой способ. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$$

или $\sin 2x = 0$. Это уравнение имеет решения $x = 90°n$, но среди них имеются посторонние (сравнить с предыдущим результатом).

Появление лишних решений обусловлено тем, что мы возводили обе части уравнения в квадрат; тем самым мы, кроме данного уравнения, привлекли еще уравнение $\sin x + \cos x = -1$ (из него получим тоже $\sin 2x = 0$). Чтобы отбросить лишние корни, выполним проверку. При $n = 0$ имеем $x = 0°$, и данное уравнение удовлетворяется. Оно удовлетворяется и при $n = 4, 8, 12$ и вообще при $n = 4k$ (т. е. при $x = 90° \cdot 4k = 360°k$). При $n = 1$ имеем $x = 90°$; данное уравнение снова удовлетворяется. Оно удовлетворяется также при $n = 5, 9, 13$ и вообще при $4k + 1$ (т. е. при $x = 90°(4k + 1) = 90° + 360°k$). Но при $n = 2, 6, 10$ (вообще при $n = 4k + 2$) и при $n = 3, 7, 11$ (вообще при $n = 4k + 3$) данное уравнение не удовлетворяется (вместо него удовлетворяется уравнение $\sin x + \cos x = -1$).

Отв. $x = 90° \cdot 4n$; $x = 90°(4n + 1)$.

852. Преобразуем правую часть:

$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2$,

после чего уравнение примет вид

$$\sin x + \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

или

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

1) $\sin x + \cos x = 0$;

2) $\sin x + \cos x - 1 = 0$.

Решая первое, найдем $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$. Второе решено в предыдущей задаче.

Отв. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$; $x = \frac{\pi}{2} \cdot 4n$.

853. Решается как задача **851.**

Отв. $x = 15°(8n + 1)$.

854. Применив формулу

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

получим

$$\frac{1}{2}[\cos(x-7x)-\cos(x+7x)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(3x-5x)-\cos(3x+5x)]$$

или, после упрощений, $\cos 6x - \cos 2x = 0$. Это уравнение распадается на два: $\sin 4x = 0$; $\sin 2x = 0$, причем все корни второго уравнения входят в число корней первого.

Отв. $x = \frac{\pi n}{4}$.

855. Применим к левой и правой частям уравнения формулу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

Отв. $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{8}(2n+1)$.

856. Имеем

$$4\sin x\sin 2x\sin 3x = \sin 2(2x)$$

или

$$\sin 2x(2\sin x\sin 3x - \cos 2x) = 0.$$

Заменяем $2\sin x\sin 3x$ на $\cos 2x - \cos 4x$ (см. задачу **854**); получим уравнение

$\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0$ или $\sin 2x\cos 4x = 0$.

Отв. $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{8}(2n+1)$.

857. Заменим $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$; получим

$$5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0,$$

откуда найдем $\cos x = \frac{\sqrt{19}-2}{5}$. Другое значение $\cos x = -\frac{\sqrt{19}+2}{5}$ не годится, так как его абсолютная величина больше единицы.

Отв. $x = 2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{19}-2}{5}$.

858. Применив формулу $\cos 2\alpha$ и выразив косинус через синус, получим $10\sin^2 x + 4\sin x - 5 = 0$.

Отв. $x = \pi n + (-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10}$.

859. Применив формулу тангенса суммы, получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

и приведем данное уравнение[1]) к виду $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$.

Отв. $x = \pi n + \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3})$.

860. Так как $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ и $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, то имеем уравнение

$$\frac{8(1 - \cos x)}{1 + \cos x} = 1 + \frac{1}{\cos x};$$

оно приводится к виду

$$9\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad (3\cos x - 1)^2 = 0.$$

Отв. $x = 2\pi n \pm \arccos \frac{1}{3}$.

861. Левая часть равна

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Правая часть равна $\sec^2 \frac{x}{2} - 1 = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$. Получаем

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Отв. $x = 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$.

---

[1]) При освобождении от знаменателя можно получить посторонние решения, но в ближайших трех задачах (в них посторонних решений нет) исследования мы не проводим. Начиная с задачи **865**, этому исследованию уделяется большое внимание. См. также задачу **867**.

862. Так как

$$\cos(\pi-x)=-\cos x \quad \text{и} \quad \sin\frac{\pi+x}{2}=\cos\frac{x}{2},$$

то имеем

$$1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0 \quad \text{или} \quad 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0.$$

Отв. $x=\pi(2n+1)$; $x=\frac{4\pi}{3}(3n\pm 1)$.

863. Применив формулы приведения

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2},$$

получим уравнение

$$2(1+\cos x)-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0.$$

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x};$$

тогда уравнение распадется на два:

$$1)\ 1+\cos x=0 \quad \text{и} \quad 2)\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отв. $x=\pi(2n+1)$; $x=\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{3}$.

864. Заменив $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, после упрощений получим $3\sin x+\cos x=0$ или $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{3}$.

Отв. $x=\pi n-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$.

865. Левая часть равна

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}.$$

Сократим дробь на $1+\cos x$. При этом предполагается, что $1+\cos x\neq 0$ (так что если потом получили бы такое решение, для которого $\cos x=-1$, то оно не годилось бы). Получим уравнение $\frac{1}{\sin x}=2$, т. е. $\sin x=\frac{1}{2}$ (при этом значении $\sin x$ величина $\cos x$ не равна -1).

Отв. $x=\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

866. По формулам приведения

$$\operatorname{ctg}(x-\pi)=-\operatorname{ctg}(\pi-x)=\operatorname{ctg} x.$$

Данное уравнение можно записать в виде

$$2\operatorname{ctg} x-(\cos x+\sin x)\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)=4.$$

После приведения левой части к общему знаменателю это уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=4,$$

откуда $\sin x\cos x=\frac{1}{4}$ или $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

Отв. $x=\frac{\pi}{2}n+(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

867. Правая часть равна

$$\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{2\sin x}=\frac{1-\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x}.$$

Сократим дробь на $\sin x$. При этом предполагается, что $\sin x\neq 0$, так что если получится такое решение, для которого $\sin x=0$, то оно не будет годиться. Данное уравнение (к левой его части применим формулы приведения) примет вид

$$\sin x+\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x \quad \text{или} \quad \sin x+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x=0.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\sin x\left(1+\frac{1}{2\cos x}\right)=0,$$

и оно распадётся на два уравнения

$$\sin x=0 \quad \text{и} \quad 1+\frac{1}{2\cos x}=0.$$

Но первое уравнение даёт посторонние решения, ибо прежде мы сокращали дробь на $\sin x$. Чтобы лучше уяснить суть дела, подставим в правую часть $\sin x=0$; тогда вместо $\cos x$ придётся подставить 1 или -1. В обоих случаях получим неопределённое выражение $\frac{0}{0}$.

Отв. $x=\frac{2\pi}{3}(3n\pm 1)$.

868. Левая часть равна

$$\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}=-\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Сокращая на $1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (при этом предполагается, что $1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\neq 0$, см. решение предыдущей задачи), получаем $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, и уравнение принимает вид

$$-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2} \quad \text{или} \quad \sin\frac{x}{2}\left(\sec\frac{x}{2}+2\right)=0.$$

Оно распадается на два:

$$1)\ \sin\frac{x}{2}=0 \quad \text{и} \quad 2)\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Из второго уравнения находим $\frac{x}{2}=360°n\pm 120°$ и получаем решение $x=720°n\pm 240°$. Первое же уравнение даст только посторонние решения ($x=360°n$), хотя и по иной причине, чем в предыдущей задаче. Именно, в данное уравнение входит величина $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, которая теряет смысл («обращается в бесконечность») при $x=360°n$; значит, вся левая часть уравнения не имеет (прямого) смысла.

Замечание. Левой части можно приписать расширенный смысл следующим образом. Если угол x мы будем неограниченно приближать к $360°n$ (к 0°, 360°, 720° и т. д.), то левая часть будет неограниченно приближаться к нулю. Величину нуль (предел левой части) естественно считать значением левой части (в расширенном смысле). В таком случае корень $x=360°n$ не будет посторонним. Но в элементарной математике такое расширение смысла выражений не принято.

Отв. $x=240°(3n\pm 1)$.

869. Применив формулы приведения, получим уравнение $\sin x-\operatorname{tg}x=\sec x-\cos x$ или $\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}-\cos x$. Помножим обе части уравнения на $\cos x$ (или, что то же, приведём к общему знаменателю и отбросим его). При этом предполагается, что $\cos x\neq 0$, ибо если $\cos x=0$, то выра-

жения $\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\frac{1}{\cos x}$ теряют смысл («обращаются в бесконечность»). Получаем уравнение

$$\cos x \sin x - \sin x = \sin^2 x.$$

Оно распадается на два:

$$1)\ \sin x = 0; \quad 2)\ \cos x - \sin x = 1.$$

Второе уравнение можно представить в виде $\sqrt{2} \cdot \cos(45° + x) = 1$ (ср. задачу 851), откуда $x = 360° n$ и $x = 360° n - 90°$. Решение $x = 360° n$ входит в число решений первого уравнения ($x = 180° n$), а решение $x = 360° n - 90°$ является посторонним, так как имеем $\cos(360° n - 90°) = 0$.

Отв. $x = 180° n$.

870. Применим формулы: $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$ и $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Получим уравнение

$$1 - \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

которое приводится к виду $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$.

Отв. $x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$.

871. Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin^3 x (\sin x + \cos x)}{\sin x} + \frac{\cos^3 x (\sin x + \cos x)}{\cos x} = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Предполагая, что $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, сократим дроби, перенесём все члены в левую часть и вынесем за скобку $\sin x + \cos x$. Получим

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x + \sin x) = 0.$$

Заменим $\sin^2 x + \cos^2 x$ на 1. Уравнение распадается на два:

$$1)\ \sin x + \cos x = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \cos x - \sin x = 1.$$

Первое уравнение даёт $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; второе уравнение (см. задачу 869) имеет решения $x = 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$. Оба они — посторонние, ибо при $x = 2\pi n$ имеем $\sin x = 0$, а при $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$ имеем $\cos x = 0$.

Отв. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$.

872. Применим формулы тройных углов:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\text{ [1]}.$$

Левая часть преобразуется к виду

$$3\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{3}{4}\sin 4x,$$

и данное уравнение примет вид $\sin 4x = \frac{1}{2}$.

Отв. $x = \frac{\pi n}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}$.

873. Запишем уравнение следующим образом:

$$\operatorname{tg} 3x - (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x) = 0.$$

Представим левую часть в виде произведения нескольких простейших тригонометрических функций. Имеем

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} = \frac{\operatorname{tg} 3x\cos 3x}{\cos x\cos 2x},$$

так что левая часть равна

$$\operatorname{tg} 3x\left[1 - \frac{\cos 3x}{\cos x\cos 2x}\right] = \operatorname{tg} 3x\left[1 - \frac{\cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}\right].$$

Выражение в скобках равно $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x$, так что получаем уравнение $\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x = 0$. Рассмотрим по отдельности три уравнения:

$$1)\ \operatorname{tg} 3x = 0;\qquad 2)\ \operatorname{tg} 2x = 0;\qquad 3)\ \operatorname{tg} x = 0.$$

Решение первого есть $x = \frac{\pi n}{3}$. Третье уравнение не даёт ничего нового, так как все его решения ($x = \pi m$) входят в число решений первого $\left(\text{при } n = 3m \text{ имеем } \frac{\pi n}{3} = \pi m\right)$. Второе уравнение даёт $x = \frac{\pi n}{2}$. При чётном n эти решения опять не дают ничего нового $\left(\text{при } n = 2k \text{ имеем } \frac{\pi n}{2} = \pi k\right)$; при нечётном же n ($n = 2n' + 1$) они вовсе не являются решениями данного уравнения. Действительно, величины $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 3x$,

---

[1] Если они не известны читателю, то он может их без труда вывести самостоятельно, применив формулы синуса и косинуса суммы двух углов: 2α и α и затем формулы синуса и косинуса от 2α.

входящие в уравнение, при $x=\frac{\pi}{2}(2n'+1)$ теряют смысл («обращаются в бесконечность»). Поэтому второе уравнение необходимо отбросить.

Отв. $x=\frac{\pi n}{3}$.

874. Применив формулу косинуса разности, приведём правую часть к виду $\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$. Поэтому и левую часть выразим через аргумент $\frac{x}{2}$. Имеем

$$(1+\cos x)+\sin x=2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=$$
$$=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right).$$

Перенеся все члены в левую часть, получим уравнение

$$\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)=0,$$

распадающееся на два: одно даёт $x=360°n-90°$, другое $x=720°n\pm 90°$. В последнем выражении можно двойной знак заменить знаком плюс, потому что все величины $720°n-90°$ содержатся среди величин $360°n-90°$ (если в выражении $360°n-90°$ брать только чётные n, т. е. положить $n=2n'$, то мы получим $720°n'-90°$).

Отв. $x=360°n-90°$; $x=720°n+90°$.

875. Перепишем данное уравнение в виде $\sin^2 2x=\sin 3x+\sin x$; отсюда $\sin^2 2x=2\sin 2x\cos x$. Перенеся все члены в левую часть, получим

$\sin 2x(\sin 2x-2\cos x)=0$ или $2\sin 2x\cos x(\sin x-1)=0$.

Уравнение распадается на три:

1) $\sin 2x=0$; 2) $\cos x=0$; 3) $\sin x=1$.

Два последних можно не рассматривать, так как все их решения входят в число решений первого. (Имеем $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$, так что, если $\cos x=0$ или если $\sin x=1$, то $\sin 2x=0$.)

Отв. $x=90°n$.

876. Левая часть равна $2\cos^2 x - 3\cos x$. Правая теряет смысл при $x = \frac{\pi}{2} n$, ибо $\operatorname{ctg} 2x$ «обращается в бесконечность». Поэтому будем считать, что $x \neq \frac{\pi}{2} n$. Знаменатель правой части равен

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(2\cos^2 x - 1) - 2\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{-1}{2\sin x \cdot \cos x},$$

так что правая часть равна

$$-\operatorname{cosec}(\pi - x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x = -2\operatorname{cosec} x \cdot \sin x \cdot \cos x.$$

Произведение $\operatorname{cosec} x \cdot \sin x$ $\left(\text{т. е. } \frac{\sin x}{\sin x}\right)$ можно заменить единицей, так как те значения x, при которых дробь $\frac{\sin x}{\sin x}$ принимала бы неопределенный вид $\frac{0}{0}$, мы исключили. Получаем уравнение

$$2\cos^2 x - 3\cos x = -2\cos x \quad \text{или} \quad \cos x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда $\cos x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. В первом случае получаем значения $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, которые мы выше исключили.

Отв. $x = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)$.

Замечание. Значения $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ также будут решениями, если правую часть уравнения понимать в расширенном смысле, как указано в замечании к решению задачи 868 (стр. 502).

877. Левая часть равна

$$(\cos x + \sin x)^2 + 1 = 2 + 2\cos x \sin x,$$

правая часть равна $\frac{2\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2\cos^2 x$; при этом предполагается, что $\sin x \neq 0$. Уравнение принимает вид

$$2(1 - \cos^2 x) + 2\cos x \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Оно распадается на два уравнения: $\sin x + \cos x = 0$ и $\sin x = 0$, но при $\sin x = 0$ правая часть не имеет (прямого) смысла.

Отв. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

878. Правая часть равна

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) =$$
$$= \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

879. Левая часть равна $2-\sin 3x$, правая равна

$$1-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=$$
$$=1-\cos 3x.$$

Уравнение принимает вид

$$\cos 3x-\sin 3x+1=0.$$

Решим его по (первому) способу задачи **851**, преобразовав $\cos 3x-\sin 3x$ к виду $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$. Получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{т. е.} \quad \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$3x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad \text{т. е.} \quad 3x=\frac{\pi}{4}[1+(-1)^n]+\pi n.$$

При чётном n выражение в квадратных скобках равно 2, а при нечётном оно равно нулю. Поэтому, если положить $n=2n'$ (n' — целое число), то получим $3x=\frac{\pi}{2}+2\pi n'$, а если положить $n=2n'+1$, то получим $3x=\pi(2n'+1)$.

Другое решение. Помимо второго способа, указанного в задаче **851** (он вводит лишние корни), можно применить здесь (а также и в задаче **851**) следующий способ. Получив, как выше, уравнение $\cos 3x-\sin 3x+1=0$, применим формулы

$$1+\cos 3x=2\cos^2\frac{3x}{2} \quad \text{и} \quad \sin 3x=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}.$$

Получим уравнение, которое распадается на два. Одно $\left(\cos\frac{3x}{2}=0\right)$ даст $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, т. е. $3x=\pi(2n+1)$. Другое уравнение $\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}=0\right)$ даст $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, т. е. $3x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Отв. $x=\frac{\pi}{3}(2n+1)$; $\quad x=\frac{\pi}{6}(4n+1)$.

880. Представим $1+\sin 2x$ в виде

$$(\cos^2 x+\sin^2 x)+2\sin x\cos x=(\cos x+\sin x)^2$$

и заменим $\operatorname{tg} x$ на $\frac{\sin x}{\cos x}$. Затем приведём все члены к общему знаменателю ($\cos x$) и отбросим его, предполагая, что $\cos x\neq 0$. Получим уравнение

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2-(\cos x+\sin x)=0.$$

Оно распадается на два: первое

$$\cos x+\sin x=0$$

имеет решение

$$x=\frac{\pi}{4}(4n-1),$$

второе

$$\cos^2 x-\sin^2 x-1=0,$$

или

$$\cos 2x-1=0,$$

имеет решение

$$x=\pi n.$$

Отв. $x=\frac{\pi}{4}(4n-1);\quad x=\pi n.$

881. Представим $1-\sin 2x$ в виде $(\cos x-\sin x)^2$, а $\cos 2x$ в виде $(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$. Сократим дробь на $\cos x-\sin x$, предполагая, что эта величина не равна нулю. Получим уравнение

$$\cos x+\sin x=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

Освободившись от знаменателя (в том же предположении), получим

$$(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-(\cos x+\sin x)=0$$

или

$$(\cos x-\sin x-1)(\cos x+\sin x)=0.$$

Решив уравнение $\cos x+\sin x=0$, находим $x=\pi n-\frac{\pi}{4}$. Уравнение $\cos x-\sin x-1=0$ можно решить так (ср. задачу 879). Представим его в виде $\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$, т. е. $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда $x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi n$.

При чётном n $(=2m)$ имеем $x=\pi n=2\pi m$. При нечётном n $(=2m-1)$ имеем $x=\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi}{2}(4m-1)$.

Применить другой способ задачи 879.

Отв. $x=\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $x=2\pi n$; $x=\frac{\pi}{2}(4n-1)$.

882. Правая часть равна $\cos 2x$, а левая

$$(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)=$$
$$=(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=(\cos x+\sin x)\cos 2x.$$

Отв. $x=\frac{\pi}{4}(2n+1)$; $x=2\pi n$; $x=\frac{\pi}{2}(4n+1)$.

883. Левая часть равна

$$\frac{1}{4}-\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{4\cos^2 x}=\frac{1}{4}-\sin^2 x$$

(в предположении, что $\cos x\neq 0$). К правой части применим формулу $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$. Получим $\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-(1-2\sin^2 x)\right]=\frac{-1+4\sin^2 x}{4}$.

Теперь уравнение примет вид

$$\frac{1}{4}-\sin^2 x=-\left(\frac{1}{4}-\sin^2 x\right),$$

откуда $\sin^2 x=\frac{1}{4}$, т. е. $\sin x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$. Два решения $x=180^\circ n+(-1)^n 30^\circ$ и $x=180^\circ n-(-1)^n 30^\circ$ можно записать одной формулой: $x=180^\circ n\pm 30^\circ$.

Отв. $x=30^\circ(6n\pm 1)$.

884. Левая часть равна $\sin 60^\circ\cos x$; правая равна

$$\operatorname{tg} x\cos^4 x+\operatorname{ctg} x\sin^4 x=\sin x\cos^3 x+\cos x\sin^3 x$$

(при последнем преобразовании предполагается, что $\cos x\neq 0$ и $\sin x\neq 0$). Это выражение равно

$$\sin x\cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)=\sin x\cos x.$$

Уравнение приводится к виду $\cos x(\sin 60^\circ-\sin x)=0$.

Оно распадается на два, одно из которых $(\cos x=0)$ даёт постороннее решение.

Отв. $x=180^\circ n+(-1)^n 60^\circ$.

885. Применив формулу $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, получим в левой части $\sec^2 x-1=\operatorname{tg}^2 x$ (сокращая на $\sin x$, мы предполагаем, что $\sin x\neq 0$). Левая часть равна

$$\frac{\sin(x-30^\circ)+\sin(x+30^\circ)}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos 30^\circ}{\cos x}=\sqrt{3}\operatorname{tg}x.$$

Уравнение приводится к виду $\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})=0$ и распадается на два, одно из которых, именно $\operatorname{tg}x=0$, даёт посторонние решения (ибо если $\operatorname{tg}x=0$, то и $\sin x=0$).

Отв. $x=60^\circ(3n+1)$.

886. Выражение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ преобразуется к виду

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sin x}.$$

Получим уравнение

$$\sqrt{2}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}.$$

Отв. $x=\frac{\pi}{4}(2n+1)$.

887. Левая часть равна $2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$; правая — равна $\frac{2\cos^2 x}{1+\sin x}=\frac{2(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}=2(1-\sin x)$. Получаем уравнение

$2(\sin x+\cos x)=2(1-\sin x)$ или $(1-\cos x)-2\sin x=0$

или

$$2\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0.$$

Отв. $x=2\pi n$; $x=2(\pi n+\operatorname{arc\,tg}2)$.

888. Дробь в левой части равна

$\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x-\cos 2x\operatorname{tg}x)\cos^2 x=$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x)\cos x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\cos x.$$

Правая часть равна

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(переходить к двойным углам здесь нерационально). Уравнение запишем в виде:

$$(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = 0$$

или

$$2 \sin^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = 0.$$

Отв. $x = 180°n$; $x = 180°n + 30°$.

889. Левая часть равна $3 \sin x - 4 \sin^3 x$, а правая $4 \sin x (1 - 2 \sin^2 x)$. Получаем уравнение

$$\sin x (4 \sin^2 x - 1) = 0.$$

Отв. $x = 180° n$; $x = 180° n \pm 30°$.

890. Правая часть равна

$$\sin x + \cos x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x \sin \frac{x}{2} + \cos x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Числитель этого выражения равен $\cos\left(x - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{x}{2}$, так что в правой части получаем $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. Левая часть равна

$$\frac{1 + \cos x}{\cos x} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0.$$

Вынося за скобку $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, получаем

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \left(\frac{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos x} - 1 \right) = 0, \text{ т. е. } \operatorname{ctg} \frac{x}{2} (\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

Отв. $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$; $x = 2\pi n + \pi$.

891. Знаменатель дроби равен

$$\frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

Вся дробь равна $\sin 2x$. Уравнение принимает вид

$$\sin 2x - 2\sin(45^\circ + x)\cos(45^\circ + x) = 0$$

или

$$\sin 2x - \cos 2x = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} 2x = 1$.

Отв. $x = 90^\circ n + 22^\circ 30'$.

892. Имеем

$$\operatorname{tg}(x - 45^\circ)\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = \operatorname{tg}(x - 45^\circ)\operatorname{ctg}(45^\circ - x) = -1;$$

при этом предполагается, что $x \neq 45^\circ(2n + 1)$, ибо тогда один из сомножителей обращается в нуль, а другой — в бесконечность. Знаменатель правой части преобразуется к виду

$$-\frac{\cos x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\frac{2\cos x}{\sin x} = -2\operatorname{ctg} x;$$

при этом предполагается, что $x \neq 180^\circ n$, ибо тогда либо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, либо $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ теряет смысл (обращается в бесконечность). Получаем уравнение

$$-\operatorname{tg} x = -\frac{4\cos^2 x}{2\operatorname{ctg} x},$$

которое (в предположении, что $x \neq 180^\circ n$) приводится к виду $\operatorname{tg} x \cos 2x = 0$. Последнее уравнение имеет решения $x = 180^\circ n$ и $x = 45^\circ(2n + 1)$, но они не соответствуют сделанным предположениям.

Отв. Уравнение не имеет решений.

893. Правая часть равна $-\operatorname{tg} x$ (см. предыдущую задачу). Левую же часть представим в виде

$$\frac{1}{2}[\operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{ctg}(x + 45^\circ)] = \frac{\sin^2(x + 45^\circ) - \cos^2(x + 45^\circ)}{2\sin(x + 45^\circ)\cos(x + 45^\circ)} =$$
$$= -\operatorname{ctg}(2x + 90^\circ).$$

Получим уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x.$$

Его можно написать в виде

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(-x);$$

отсюда заключаем, что углы $2x$ и $-x$ разнятся на $180° n$ и из уравнения $2x = -x + 180° n$ находим $x = 60° n$.

Отв. $x = 60° n$.

894. Левая часть равна

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)} = \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2x)}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{2\sin 2x}{\cos 2\alpha + \cos 2x} = 2\operatorname{ctg} x.$$

Применив формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, приведём уравнение к виду

$$\cos x\,(2\sin^2 x - \cos 2x - \cos 2\alpha) = 0.$$

Уравнение

$$2\sin^2 x - \cos 2x - \cos 2\alpha = 0,$$

если в нём написать $1 - \cos 2x$ вместо $2\sin^2 x$, даёт

$$2\cos 2x = 1 - \cos 2\alpha,$$

откуда

$$\cos 2x = \sin^2 \alpha.$$

Отв. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$; $x = \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos(\sin^2\alpha)$.

895. Левая часть равна $1 - \sin x$; знаменатель правой части равен

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

Это выражение приводится к виду $\frac{2}{\sin x}$. Получаем уравнение $1 - \sin x = \sin x$.

Отв. $x = 180° n + (-1)^n 30°$.

896. Левая часть равна $\operatorname{tg} x$. Правая (ср. задачу **894**) равна $1 + 2\operatorname{tg} x$.

Отв. $x = 45°(4n - 1)$.

897. Имеем

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2;$$

аналогично,

$$\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2.$$

Уравнение принимает вид $1-\cos 2x+\sin 2x=0$, или

$$2\sin^2 x+2\sin x\cos x=0.$$

Отв. $x=\pi n$; $x=\pi n-\frac{\pi}{4}$.

897а. Уравнение представим (см. предыдущую задачу) в виде

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sin 2x}{2}\right)^2=\frac{9}{8}.$$

После алгебраических преобразований получим

$$3-2\cos 2x+\cos^2 2x+2\sin^2 2x=\frac{9}{2}.$$

Заменив $\sin^2 2x$ на $1-\cos^2 2x$, получим уравнение

$$\cos^2 2x+2\cos 2x-\frac{1}{2}=0.$$

Оно дает $\cos 2x=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ (значение $\cos 2x=-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$ отбрасываем, ибо его абсолютная величина больше, чем 1).

Отв. $x=\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

898. Левую часть первого уравнения представим в виде $\frac{1}{2}(\cos x+\cos y)$. Решив систему, найдем $\cos x=\frac{1}{2}$; $\cos y=\frac{1}{2}$.

Отв. $x=2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; $y=2\pi l\pm\frac{\pi}{3}$.

899. Так как

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2},$$

то второе уравнение можно записать так:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2m.$$

Но $x+y=\alpha$; следовательно,

$$\cos(x-y) = 2m + \cos\alpha,$$

откуда

$$x - y = 2\pi n \pm \arccos(2m + \cos\alpha),$$

и данная система распадается на две:

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ x-y=2\pi n + \arccos(2m+\cos\alpha) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ x-y=2\pi n - \arccos(2m+\cos\alpha). \end{cases}$$

Отв. $\begin{cases} x_1 = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha), \\ y_1 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha); \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = \pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha), \\ y_2 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha). \end{cases}$$

900. Применив формулу $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, запишем второе уравнение так: $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = m$. Заменив $\cos x \cos y$ на $\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$ и $x+y$ на α, получим

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(x-y)} = m$$

или

$$\cos(x-y) = \frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha.$$

Это уравнение распадается на два:

$$x - y = 2\pi n + \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right)$$

и

$$x - y = 2\pi n - \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right).$$

Присоединяем к каждому из них уравнение $x + y = \alpha$, получаем две системы уравнений (см. предыдущую задачу).

Отв.
$$\begin{cases} x_1 = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right), \\ y_1 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right), \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = \pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right), \\ y_2 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right). \end{cases}$$

901. Решается как предыдущая задача.

Отв. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$, $y_1 = -\pi n$;

$x_2 = \pi n$, $y_2 = -\frac{\pi}{4}(4n - 1)$.

902. Так как $1 = 2^0$ и $4 = 16^{\frac{1}{2}}$, то данную систему можно записать так:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда получим

1) $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos y = -\frac{1}{2}$ и 2) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\cos y = \frac{1}{2}$.

Отв. $x_1 = 180^\circ n + (-1)^n 30^\circ$, $y_1 = 360^\circ n \pm 120^\circ$;
$x_2 = 180^\circ n - (-1)^n 30^\circ$, $y_2 = 360^\circ n \pm 60^\circ$.

903. Второе уравнение можно представить в виде

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{1}{3},$$

где в силу первого уравнения $\sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Получаем систему уравнений:

$$\cos x \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}}, \quad \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Складывая и вычитая их почленно, получим

$$\cos(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos(x+y) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

откуда

$$x+y = 2\pi m \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x-y = 2\pi k \pm \frac{\pi}{4},$$

где m и k — произвольные целые числа. В каждом из этих уравнений можно взять любой из знаков $\pm$.

Замечание. Числа $m+k$ и $m-k$ тоже целые, но не вполне произвольные (если одно из них чётное, то и другое чётное, а если одно из них нечётное, то и другое нечётное).

Отв. 1) $x = \pi n + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}$,

$y = \pi l + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$;

2) $x = \pi n + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$,

$y = \pi l + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}$;

3) $x = \pi n - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}$,

$y = \pi l - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$;

4) $x = \pi n - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$,

$y = \pi l - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}$,

где $n = m+k$; $l = m-k$ (m и k — любые целые числа).

904. Возведём в квадрат обе части каждого из данных уравнений и сложим почленно. Получим

$$1 = 4\sin^2 y + \frac{1}{4}\cos^2 y \quad \text{или} \quad 1 = 4(1 - \cos^2 y) + \frac{1}{4}\cos^2 y,$$

откуда $\cos^2 y = \frac{4}{5}$ и $\sin^2 y = \frac{1}{5}$. В каждом из выражений $\cos y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ можно взять любой знак (так что в пределах от 0 до 360° угол y может иметь четыре значения). Подставляя эти значения в данные уравнения, находим, что углы x и y удовлетворяют одному из следующих четырёх соотношений:

1) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin y = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

2) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin y = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

4) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Рассмотрим первое из них. Если взять отдельно равенство $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то оно даёт $x = 2\pi n \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. Но (по определению главного значения арккосинуса) угол $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ принадлежит первой или второй четверти, где функция синус всегда положительна. Значит, нужно сохранить только знак плюс. Действительно, из равенства $x = 2\pi n \pm \varphi$ следует, что $\sin x = \pm\sin\varphi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Между тем во взятом нами первом соотношении $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\left(\text{а не } -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. То же имеет место для угла y, так что в случае соотношения 1) мы получим

$$x = 2\pi n + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = 2\pi n_1 + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}},$$

где n и n_1 — любые целые числа. Рассуждая так же, найдём, что в случае второго соотношения

$$x = 2\pi n - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = 2\pi n_1 - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

и аналогично для третьего и четвёртого соотношений.

Отв. $x = 2\pi n \pm \arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,

$y = 2\pi n_1 \pm \arccos\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$,

где знаки в скобках одни и те же для x и для y и знаки перед аркусами также одинаковы.

ГЛАВА 13

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

905. Имеем

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4},$$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos(-1) = \pi.$$

Отв. $\frac{5\pi}{6}$.

906. Угол $\varphi = \arccos x$ заключён между 0 и 180° (по определению главного значения арккосинуса). Значит, $\sin\varphi$ положителен (или равен нулю). Имеем $\cos\varphi = x$, откуда $\sin\varphi = +\sqrt{1-x^2}$ (перед радикалом берётся только знак плюс). Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ т. е. } \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

что и требуется доказать.

907. См. решение предыдущей задачи.

908. Положим $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = \varphi$, так что $\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{3}{4}$. Угол φ заключён между 90° и 180° (ибо главное значение

арккотангенса заключено между 0 и 180°). Требуется найти $\sin\frac{\varphi}{2}$. Применим формулу

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},$$

где из двух знаков $\pm$ нужно взять только знак $+$ (ибо угол $\frac{\varphi}{2}$ принадлежит первой четверти). Предварительно нужно найти $\cos\varphi$ по формуле

$$\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};$$

получаем

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=-\frac{3}{5}$$

(перед радикалом берём только знак плюс, так как φ принадлежит второй четверти). Теперь находим

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отв. $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

909. Положим $\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\varphi$, так что $\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Угол φ заключён в пределах между $-90°$ и $0°$ (так как главное значение арксинуса заключено между $-90°$ и $+90°$). Требуется найти $\sin\frac{\varphi}{2}$. Эта величина — отрицательная. Поэтому в формуле

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

нужно удержать только знак минус. Получаем

$$\sin\frac{\varphi}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},$$

где

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$$

(перед радикалом берём только знак плюс!).

Отв. $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)\right]=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

910. Угол $\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)$ заключён между 90° и 180° (см. решения двух предыдущих задач). Значит, $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ положителен, так что

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$$

(перед радикалом берётся только знак плюс). Сюда подставляем $\cos\varphi=-\frac{4}{7}$.

Отв. $\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right]=\frac{\sqrt{33}}{11}$.

911. Так как

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},$$

то имеем

$$\operatorname{tg}\left(5\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1.$$

Отв. -1.

912. Имеем

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3} \quad \text{и} \quad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

Дальше — как в предыдущей задаче.

Отв. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

913. *Отв.* $\frac{1}{2}$.

914. Положим

$$\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})=\alpha, \qquad (1)$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\beta. \qquad (2)$$

Требуется доказать, что

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}. \qquad (3)$$

Найдём $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

с помощью (1) и (2) получим

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{(3+2\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(3+2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}=1. \qquad (4)$$

С другой стороны, из (1) и (2) видно, что каждый из углов α и β содержится между 0 и $\frac{\pi}{2}$, причём $\alpha>\beta$ (ибо $3+2\sqrt{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$); следовательно, угол $\alpha-\beta$ заведомо лежит между 0 и $\frac{\pi}{2}$, так что из (4) получаем $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Для доказательства того, что угол $\alpha-\beta$ равен именно $\frac{\pi}{4}$, т. е. 45° (а не 225° и не —135° и т. д.), можно было бы, пользуясь таблицами, непосредственно найти углы α и β. При этом можно ограничиться грубыми приближениями (например, учитывать только градусы). Так, положив $\sqrt{2}\approx 1{,}4$, найдём $\alpha\approx\operatorname{arctg}5{,}8$, что составляет около 80° (погрешность заведомо не превышает $\frac{1}{2}^{\circ}$). Точно так же найдём $\beta\approx\operatorname{arctg}0{,}7$, что составляет около 35° (погрешность тоже заведомо меньше чем $\frac{1}{2}^{\circ}$). Следовательно, $\alpha-\beta$ не отличается от 45° более чем на 1°, а значит, в точности равен 45°.

915. Положим

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}=\alpha, \quad \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\beta\ ^{1)},$$

так что $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\cos\beta=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$. Каждый из углов α и β принадлежит первой [2]) четверти. Требуется доказать, что $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$.

Найдём $\sin(\alpha-\beta)$, для чего предварительно вычислим

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{и} \quad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

(перед каждым из радикалов берём только знак плюс, так как α и β принадлежат первой четверти). Находим $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\sin\beta=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{12}}$, так что

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{12}}=$$
$$=\frac{\sqrt{6}+1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}.$$

Докажем, что найденное иррациональное выражение равно $\frac{1}{2}$. Для этого преобразуем «двойную иррациональность» $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{5-\sqrt{24}}$. Преобразование можно выполнить по формуле

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

(при $A=5$, $B=24$); мы получим

$$\sqrt{\frac{5+1}{2}}-\sqrt{\frac{5-1}{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

---

[1]) Можно обойтись и без введения вспомогательных величин α и β и решить задачу таким способом, который приведён в замечании к задаче 914.

[2]) Главное значение арккосинуса лежит между 0 и π.

Но проще представить подкоренное выражение $5-2\sqrt{6}$ в виде $3+2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$, и тогда имеем

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\,^{1)}.$$

Поскольку каждый из углов α и β лежит в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, угол $\alpha-\beta$ заведомо лежит в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, а тогда из равенства $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$ следует $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$, что и требовалось доказать [2]).

916. Пусть (см. две предыдущие задачи)

$$\arcsin\frac{4}{5}=\alpha,\quad \arcsin\frac{5}{13}=\beta,\quad \arcsin\frac{16}{65}=\gamma.$$

Тогда

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=\frac{3}{5};\quad \sin\beta=\frac{5}{13},\quad \cos\beta=\frac{12}{13};$$

$$\sin\gamma=\frac{16}{65},\quad \cos\gamma=\frac{63}{65}.$$

Отсюда

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}\ \text{ и }\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{16}{65}.$$

Оба угла α и β принадлежат первой четверти; поэтому угол $\alpha+\beta$ заключён между 0° и 180°, а так как косинус угла $\alpha+\beta$ положителен, то $\alpha+\beta$ принадлежит первой четверти. Кроме того, $\cos(\alpha+\beta)=\sin\gamma$ и $\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$. Поэтому $\alpha+\beta$ и $\frac{\pi}{2}-\gamma$ могут отличаться только на $2\pi n$, а так как $\frac{\pi}{2}-\gamma$ тоже принадлежит первой четверти, то $n=0$. Следовательно, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

---

[1]) Число $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ положительно.

[2]) Если бы вместо $\sin(\alpha-\beta)$ мы вычислили $\cos(\alpha-\beta)$, то нашли бы $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ мы имели бы два значения $\alpha-\beta$, именно $-\frac{\pi}{6}$ и $+\frac{\pi}{6}$; поэтому пришлось бы предварительно установить что $\alpha>\beta$, т. е. что $\cos\alpha<\cos\beta$.

917. Имеем $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$; обозначим $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ через β, так что $\cos\beta=-\frac{1}{7}$. Угол β содержится между $\frac{\pi}{2}$ и π (см. три предыдущие задачи). Поэтому

$$\sin\beta=+\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}\ \left[\text{а не } -\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right],$$

т. е.

$$\sin\beta=\frac{4}{7}\sqrt{3}.$$

Находим

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\beta-\sin\frac{\pi}{3}\sin\beta=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{3}=-\frac{13}{14}.$$

Чтобы доказать справедливость данного тождества, нужно ещё убедиться в том, что угол $\frac{\pi}{3}+\beta$ принадлежит второй четверти $\left[\text{ибо угол } \arccos\left(-\frac{13}{14}\right) \text{ в правой части равенства лежит во второй четверти}\right]$. Угол $\beta=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ заключён между $\frac{\pi}{2}$ и π; следовательно, угол $\frac{\pi}{3}+\beta$ содержится между $\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Из этой оценки, однако, ещё не следует, что угол $\frac{\pi}{3}+\beta$ принадлежит второй четверти (ведь угол $\frac{4\pi}{3}$ находится уже в третьей четверти). Но если учесть, что $-\frac{1}{7}>-\frac{1}{2}$ и что, следовательно, $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)<\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, т. е. $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)<\frac{2\pi}{3}$, то отсюда следует, что $\frac{\pi}{3}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)<\pi$. А так как по предыдущему этот угол больше, чем $\frac{5\pi}{6}$, то он лежит во второй четверти. Этим данное тождество доказано.

Замечание. Принадлежность угла $\frac{\pi}{3}+\beta$ второй (а не третьей) четверти можно доказать ещё следующим образом: имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\beta+\cos\frac{\pi}{3}\sin\beta=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{3}=\frac{3}{14}\sqrt{3}.$$

Так как это число положительно, то угол $\frac{\pi}{3}+\beta$ принадлежит второй четверти.

918. Положим $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=\alpha$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}=\beta$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$. Вычислим

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Предварительно находим

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{12},$$

а затем

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{32}{43}.$$

Углы $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ и $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$ принадлежат первой четверти, но из этого ещё не следует, что угол $2\alpha+\beta$ принадлежит первой (а не третьей) четверти. Но если учесть, что каждый из углов α и β меньше, чем $\frac{\pi}{4}$ (так как их тангенсы меньше чем 1), то отсюда следует, что $2\alpha+\beta$ меньше чем $\frac{3\pi}{4}$, а так как сверх того $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{32}{43}$ положителен, то $2\alpha+\beta$ лежит в первой четверти, т. е. $2\alpha+\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{43}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Вместо того, чтобы доказывать, что угол $2\alpha+\beta$ не выходит за пределы первой четверти, можно найти этот угол (хотя бы очень грубо) с помощью таблиц (см. замечание к задаче 914). Получим: $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}\approx 11^\circ$, $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}\approx 14^\circ$, так что $2\alpha+\beta\approx 36^\circ$.

919. Положим

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\alpha, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=\beta, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\gamma, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\delta$$

и найдём сначала

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{4}{7},$$

затем

$$\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)+\gamma]=\frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{7}{9}$$

и, наконец,

$$\operatorname{tg}[(\alpha+\beta+\gamma)+\delta]=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}=1.$$

Как в предыдущей задаче, докажем, что угол $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ лежит в первой четверти. Следовательно, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$.

920. Имеем $\operatorname{arc\,tg}(x^2-3x-3)=\frac{\pi}{4}$, откуда $x^2-3x-3=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, т. е. $x^2-3x-3=1$. Отсюда находим $x_1=4$; $x_2=-1$.

Отв. $x_1=4$; $x_2=-1$.

Замечание. Если бы вместо уравнения $\operatorname{arc\,tg}(x^2-3x-3)=\frac{\pi}{4}$ мы имели уравнение $\operatorname{arc\,tg}(x^2-3x-3)=-\frac{3\pi}{4}$, то такое уравнение не имело бы решений, так как главное значение арктангенса не может равняться $-\frac{3\pi}{4}$. Если не обратить внимания на это обстоятельство, можно получить то же уравнение $x^2-3x-3=1$, но корни последнего уравнения не годятся.

921. Имеем

$$\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\frac{\pi}{6},$$

откуда $x^2-6x+8{,}5=0{,}5$.

Отв. $x_1=4$; $x_2=2$.

922. Взяв тангенсы обеих частей уравнения и учитывая, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\alpha)=\alpha$, получим

$$\frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}=1,$$

откуда $x_1=-1$; $x_2=-2$. Проверяем эти корни. Если $x=-1$, то

$$\operatorname{arc\,tg}(x+2)=\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \operatorname{arc\,tg}(x+1)=\operatorname{arc\,tg}0=0,$$

так что данное уравнение удовлетворяется. Так же докажем, что и второй корень годится.

Отв. $x_1=-1$; $x_2=-2$.

Замечание. Почему проверка необходима, видно из следующего примера. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{arc\,tg}(x+2)-\operatorname{arc\,tg}(x+1)=-\frac{3\pi}{4},$$

отличающееся от данного только значением свободного члена. Заранее нельзя сказать, что оно не имеет решений (ср. задачу **920**). Если бы, скажем, $\operatorname{arc\,tg}(x+2)$ равнялся $-\frac{\pi}{3}$, а $\operatorname{arc\,tg}(x+1)$ был равен $\frac{5}{12}\pi$ (эти значения могут быть главными значениями арктангенса), то левая часть равнялась бы $-\frac{3\pi}{4}$. Взяв тангенсы обеих частей рассматриваемого уравнения, мы снова получим уравнение $\frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}=1$, но теперь ни один из корней $x_1=-1$, $x_2=-2$ не годится.

См. ещё замечание к задаче **925**.

923. Берём тангенс обеих частей уравнения. Предварительно находим (см. предыдущую задачу):

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

и тогда получаем $\dfrac{\frac{4}{3}-x}{1+\frac{4x}{3}}=1$. Корень этого уравнения есть $x=\frac{1}{7}$; его нужно проверить (см. замечание к предыдущей задаче). Подставляя в левую часть уравнения $x=\frac{1}{7}$, полу-

чаем $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$. Угол $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ заключён в пределах между 0 и $\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{так как } \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$. В тех же пределах лежит угол $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$. Угол 2α принадлежит первой четверти, а угол $2\alpha-\beta$ лежит между $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$. Но $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=1$, так что $2\alpha-\beta=\pi n+\frac{\pi}{4}$. Но только при $n=0$ угол $2\alpha-\beta$ попадает внутрь найденных нами границ. Следовательно, данное уравнение удовлетворится.

Отв. $x=\frac{1}{7}$.

924. Возьмём синусы от обеих частей равенства. Можно положить

$$\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}=\alpha \quad \text{и} \quad \arcsin\sqrt{1-x}=\beta$$

(см. решение задачи **915**); но можно обойтись без них, воспользовавшись формулой $\sin(\arcsin x)=x$ (она непосредственно вытекает из определения арксинуса) и формулой $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ [1]). Следовательно, синус левой части равен

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-x},$$

и данное уравнение принимает вид

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{9x-4}}{3\sqrt{x}}\sqrt{1-x}=\frac{1}{3}.$$

Решив его, находим $x=\frac{2}{3}$. Этот корень нужно проверить (см. замечание к задаче **922**), т. е. нужно доказать тождество

$$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}=\arcsin\frac{1}{3}.$$

Доказательство ведётся, как в задаче **917**.

Отв. $x=\frac{2}{3}$.

---

[1]) Эта формула выводится следующим образом. Положим $\arcsin x=\alpha$. Тогда $\sin\alpha=x$ и $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$. Перед радикалом берётся только знак плюс, так как угол $\alpha=\arcsin x$ лежит в границах от -90 до $+90°$ (главное значение арксинуса!). Подставляя вместо α выражение $\arcsin x$, получаем требуемую формулу.

925. Взяв тангенсы обеих частей уравнения, получим

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a}{b}\cdot\frac{a-b}{a+b}}=x,$$

откуда $x=1$.

Это значение надо проверить (см. замечание к задаче **922**). Подставляя $x=1$ в данное уравнение, получаем

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b}=45°. \qquad (1)$$

Введём обозначение

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}=\varphi. \qquad (2)$$

Здесь угол φ (главное значение арктангенса) заключён в границах

$$-90°<\varphi<90°. \qquad (3)$$

При этом обозначении имеем

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{arc\,tg}\frac{b\operatorname{tg}\varphi-b}{b\operatorname{tg}\varphi+b}=\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tg}(\varphi-45°), \qquad (4)$$

так что надо проверить равенство

$$\varphi-\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tg}(\varphi-45°)=45°. \qquad (5)$$

Это равенство будет верным в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tg}(\varphi-45°)=\varphi-45°. \qquad (6)$$

Равенство же (6) имеет место, когда угол $\varphi-45°$ (главное значение арктангенса) заключён в границах

$$-90°<\varphi-45°<90°, \qquad (7)$$

т. е. когда

$$-45°<\varphi<135°. \qquad (8)$$

Учитывая неравенство (3), получаем для угла φ более тесные пределы

$$-45°<\varphi<90°. \qquad (9)$$

Из (2) и (9) находим

$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\varphi>\operatorname{tg}(-45°),$$

т. е.

$$\frac{a}{b}>-1. \qquad (10)$$

Обратно, при $\frac{a}{b} > -1$ угол φ удовлетворяет неравенству (9).

Следовательно, данное уравнение имеет решение ($x=1$) при $\frac{a}{b} > -1$. При $\frac{a}{b} < -1$ решений нет.

Например, при $a = -\sqrt{3}$, $b = 1$ имеем

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -60°;$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{arc\,tg}\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} \approx \operatorname{arc\,tg} 3{,}732 = 75°,$$

так что левая часть данного уравнения равна $-135°$, а правая часть при $x=1$ равна $45°$.

Отв. $x=1$ при $\frac{a}{b} > -1$; уравнение не имеет решения при $\frac{a}{b} < -1$.

926. Возьмем косинусы обеих частей уравнения. Получим (см. задачу **924**) $\sqrt{1-9x^2} = 4x$. Это уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{5}$. Проверим его. Угол $\alpha = \arcsin 3x = \arcsin\frac{3}{5}$ принадлежит первой четверти; угол $\beta = \arccos 4x = \arccos\frac{4}{5}$ принадлежит тоже первой четверти. При этом $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; следовательно, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. С другой стороны, $\cos\beta = \frac{4}{5}$; следовательно, $\alpha = \beta$.

Отв. $x = \frac{1}{5}$.

927. Возьмем синусы обеих частей уравнения. Получим (см. задачу **924**) $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{10x}{13}$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = +\frac{12}{13}$, $x_3 = -\frac{12}{13}$. Проверяем эти корни.

Отв. $x=0$; $x = \pm\frac{12}{13}$.

928. Из первого уравнения находим

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{2a}{1-a^2},$$

т. е.

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{2a}{1-a^2}.$$

Принимая во внимание второе уравнение, получим

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-a^2}=\frac{2a}{1-a^2}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2a.$$

Из системы уравнений

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2a, \quad \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=a^2$$

находим $\operatorname{tg}x=a$; $\operatorname{tg}y=a$. Отсюда следует, что $x=180^\circ n+\operatorname{arc\,tg}a$, $y=180^\circ m+\operatorname{arc\,tg}a$, где n и m — целые числа. Но лишь одно из них можно взять произвольным, так как согласно первому уравнению величина $x+y$, как главное значение арктангенса, должна содержаться между -90° и $+90^\circ$.

Чтобы выделить годные значения n и m, подставим найденные выражения в первое уравнение. Получим

$$180^\circ(n+m)+2\operatorname{arc\,tg}a=\operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{1-a^2}. \qquad \text{(A)}$$

Так как согласно условию $|a|<1$, то угол $\operatorname{arc\,tg}a$ содержится между -45° и $+45^\circ$, т. е. $2\operatorname{arc\,tg}a$ содержатся между -90° и $+90^\circ$. В тех же пределах содержится угол $\operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{1-a^2}$ (главное значение арктангенса). Следовательно, эти два угла разнятся менее, чем на 180°. Поэтому равенство (A) возможно лишь при $n+m=0$.

Отв. $x=180^\circ n+\operatorname{arc\,tg}a$, $y=-180^\circ n+\operatorname{arc\,tg}a$.